# Sammlung

von

# Aufgaben aus der endlichen Differenzen- und Summenrechnung.

Von

J. F. W. Herschel.

---

Deutsch herausgegeben

von

Dr. C. H. Schnuse.



---

Braunschweig,

Verlag der Hofbuchhandlung von Eduard Leibrock.

1859.

Druck der Hofbuchdruckerei von Eduard Krampe in Braunschweig.

# Inhaltsverzeichniß.

# Vorwort.

Da es in der deutschen mathematischen Literatur, soviel ich weiß, keine Sammlung von Aufgaben über die wichtigsten Lehren der endlichen Differenzen- und Summenrechnung gibt, so wird eine deutsche Ausgabe von Herschel's trefflicher Collection of Examples of the Applications of the Calculus of Finite Differences wohl keiner besondern Rechtfertigung bedürfen, abgesehen davon, daß das Original nur sehr schwer und zu sehr hohen Preisen (7 bis 8 Thaler) zu erhalten ist. – Ueber den wissenschaftlichen Werth dieser Sammlung herrscht in England nur eine Stimme. — Professor De Morgan sagt z. B. in der Encyclopaedia Metropolitana darüber: „Herschel's Treatise on the Calculus of Differences is one of the richest analytical Works of its size extant" und Prof. Hall nennt sie in derselben Enc. Metrop. eine „invaluable collection of Examples, the almost constant subject of our reference." —

Heidelberg im August 1858.

Dr. Schnuse.

# Erster Abschnitt.

---

### Beispiele zu der directen Differenzenrechnung.

In den folgenden Aufgaben wird $x$ immer als die unabhängig Veränderliche und $\triangle x$ als der Einheit gleich betrachtet. — Man soll die folgenden Differenzen bestimmen:

(1) $$\triangle \sin x\theta = 2 \,.\, \sin\frac{\theta}{2} \,.\, \cos\left(x\theta + \frac{\theta}{2}\right),$$

$$\triangle \cos x\theta = -2 \,.\, \sin\frac{\theta}{2} \sin\left(x\theta + \frac{\theta}{2}\right).$$

(2) $$\triangle \sin(h + x\theta) = 2 \,.\, \sin\frac{\theta}{2} \,.\, \cos\left\{h + \left(x + \frac{1}{2}\right)\theta\right\},$$

$$\triangle \cos(h + x\theta) = -2 \,.\, \sin\frac{\theta}{2} \sin\left\{h + \left(x + \frac{1}{2}\right)\theta\right\}.$$

(3) $$\triangle^{2n} \sin(h + x\theta) = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n} . \sin\{h + (x + n)\theta\}$$

$$\triangle^{2n} \cos(h + x\theta) = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n} . \cos\{h + (x + n)\theta\}$$

$$\triangle^{2n-1} \sin(h + x\theta) =$$

$$= \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n-1} . \cos\left\{h + \left(x + \frac{2n-1}{2}\theta\right)\right\}$$

$$\triangle^{2n-1} \cos(h + x\theta) =$$

$$= -\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n-1} . \sin\left\{h + \left(x + \frac{2n-1}{2}\theta\right)\right\}.$$

$$(4)\quad \Delta \tan x\theta = \frac{\sin\theta}{\cos x\theta \,.\, \cos(x+1)\theta}.$$

$$(5)\quad \Delta \operatorname{cotan} x\theta = \frac{-\sin\theta}{\sin x\theta \,.\, \sin(x+1)\theta}.$$

$$(6)\quad \Delta \frac{a^{2^x}+1}{a^{2^x}-1} = -\frac{2\,a^{2^x}}{a^{2^{x+1}}-1}.$$

$$(7)\quad \Delta \frac{2^x(a^{2^x}+1)}{a^{2^x}-1} = 2^x \,.\, \frac{a^{2^x}-1}{a^{2^x}+1}.$$

$$(8)\quad \Delta\, 2^x \sin\frac{\theta}{2^x} = 2^{x+2} \,.\, \sin\frac{\theta}{2^{x+1}} \,.\, \left(\sin\frac{\theta}{2^{x+2}}\right)^2.$$

$$(9)\quad \Delta\, 2^{2x}\left(\sin\frac{\theta}{2^x}\right)^2 = 2^{2x+2} \,.\, \left(\sin\frac{\theta}{2^{x+1}}\right)^4.$$

$$(10)\quad \Delta \tan\frac{\theta}{2^x} = -\frac{\tan\frac{\theta}{2^{x+1}}}{\cos\frac{\theta}{2^x}},$$

$$(11)\quad \Delta \,.\, \tan\frac{\theta}{2^x} = -2^x \,.\, \tan\frac{\theta}{2^x} \,.\, \left(\tan\frac{\theta}{2^{x+1}}\right)^2.$$

$$(12)\quad \Delta \,.\, (-2)^x \,.\, \sin\frac{\theta}{2^x}$$

$$= (-1)^{x+1} \,.\, 2^{x+3} \,.\, \sin\frac{\theta}{2^{x+2}}\left(\cos\frac{\theta}{2^{x+2}}\right)^3.$$

$$(13)\quad \Delta \frac{1}{2^x \,.\, \sin\frac{\theta}{2^x}} = -2 \,.\, \frac{\sin\frac{\theta}{2^{x+2}}}{2^x \,.\, \sin\frac{\theta}{2^x}}.$$

$$(14)\quad \Delta \frac{1}{2^x \,.\, \tan\frac{\theta}{2^x}} = \frac{\tan\frac{\theta}{2^{x+1}}}{2^{x+1}}.$$

$$(15)\quad \Delta \left\{\frac{1}{2^x \cdot \tan\frac{\theta}{2^x}}\right\}^2 = \frac{1}{2^{x+1}} - \left\{\frac{\tan\frac{\theta}{2^{x+1}}}{2^{x+1}}\right\}.$$

$$(16)\quad \Delta \frac{\cos\frac{\theta}{2^x}}{\left\{2^x \cdot \sin\frac{\theta}{2^x}\right\}^3} = \frac{\sin\frac{\theta}{2^x+1}}{\left\{2^{x+1} \cdot \cos\frac{\theta}{2^{x+1}}\right\}^3}.$$

$$(17)\quad \Delta \cot 2^x \theta = -\frac{1}{\sin 2^{x+1}\theta}.$$

$$(18)\quad \Delta \frac{\log(2\sin 2^x\theta)}{2^x} = -\frac{\log\tan 2^x\theta}{2^{x+1}}.$$

$$(19)\quad \Delta \frac{1}{\left(2^x \cdot \sin\frac{\theta}{2^x}\right)^2} = -\frac{1}{\left(2^{x+1} \cdot \cos\frac{\theta}{1^{x+1}}\right)^2}.$$

$$(20)\quad \Delta \frac{1}{c_x \cdot c_{x+1} \ldots c_{x+2n+1}}$$

$$= 2\sin(n+1)\theta \cdot \frac{s_{x+n+1}}{c_x \cdot c_{x+1} \ldots c_{x+2n+2}}.$$

$$(21)\quad \Delta \frac{(-1)^x}{s_x \cdot s_{x+1}} = 2 \cdot \cos\theta \cdot \frac{(-1)^{x+1}}{s_x \cdot s_{x+2}}$$

$$(22)\quad \Delta \frac{(-1)^x}{s_x \cdot s_{x+1} \ldots s_{x+2n+1}}$$

$$= 2 \cdot \cos(n+1)\theta \cdot \frac{(-1)^{x+1} \cdot s_{x+n+1}}{s_x \cdot s_{x+1} \ldots s_{x+2n+2}}.$$

$$(23)\quad \Delta \frac{(-1)^x}{c_x \cdot c_{x+1}} = 2 \cdot \cos\theta \cdot \frac{(-1)^{x+1}}{c_x \cdot c_{x+2}}.$$

$$(24)\quad \Delta \frac{(-1)^x}{c_x \cdot c_{x+1} \ldots c_{x+2n+1}}$$

$$= 2 \cdot \cos(n+1)\theta \cdot \frac{(-1)^{x+1} \cdot c_{x+2n+2}}{c_x \cdot c_{x+1} \ldots c_{x+n+1}}.$$

(25) $\triangle \tan^{-1} x\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\theta}{1+\theta^2 x+\theta^2 x^2}\right\}.$

(26) $\triangle \tan^{-1}(h+x\theta) = \tan^{-1}\left\{\frac{\theta}{1+\theta(h+x\theta)+(h+x\theta)^2}\right\}.$

(27) $\triangle \tan^{-1}\left\{\frac{a+bx}{A+Bx}\right\} =$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{Ab-aB}{\left\{\begin{matrix}A^2+AB\\+a^2+ab\end{matrix}\right\}+x\left\{\begin{matrix}2AB+B^2\\+2ab+b^2\end{matrix}\right\}+x^2(B^2+b^2)}\right\}.$$

(28) $\triangle \tan^{-1} u_x = \tan^{-1}\frac{\triangle u_x}{1+u_x u_{x+1}}.$

(29) $\triangle . 2^x \tan^{-1}\left(\frac{\theta}{2^x}\right) = 2^x . \tan^{-1}\left\{\frac{\theta^3}{4.2^{3x}+3\theta^2.2^x}\right\}.$

Es ist der Kürze wegen $s_x = \sin(a+x\theta)$ und $c_x = \cos(a+x\theta)$ gesetzt. — Auch steht immer $\tan^{-1}$ statt der in deutschen Schriften üblichen Bezeichnung arctang, weil die erste Bezeichnung offenbar den Vorzug verdient. — Mittelst derselben ergibt sich z. B. aus er Formel:

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A . \tan B};$$

wenn man auf beiden Seiten die inversen Functionen $\tan^{-1}$ nimmt:

$$A - B = \tan^{-1}\left\{\frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A . \tan B}\right\}$$

oder wenn für $A$ und $B$ resp. $\tan^{-1} A$ und $\tan^{-1} B$ gesetzt wird:

$$\tan^{-1} A - \tan^{-1} B = \tan^{-1}\left\{\frac{A-B}{1+AB}\right\}.$$

(30). Man soll die Richtigkeit der beiden folgenden Gleichungen beweisen:

$$\cos 2n\theta = 1 - np \,.\, \sin\theta - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, p^2 \,.\, \cos 2\theta$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, p^3 \,.\, \sin 3\theta + \text{\&c.}$$

$$\sin 2n\theta = \frac{n}{1} p \,.\, \cos\theta - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, p^2 \,.\, \sin 2\theta$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, p^3 \,.\, \cos 3\theta + \text{\&c.}$$

wo $p = 2 \sin\theta$ gesetzt ist, die Zeichen abwechselnd $+ + - -$ sind und die Reihen bei dem Gliede mit $p^n$ abbrechen, wenn $n$ eine positive ganze Zahl ist. —

Diese beiden Formeln ergeben sich aus dem bekannten allgemeinen Ausdrucke für $u_{x+n}$, wenn man successive $\cos 2x\theta$, $\sin 2x\theta$ für $u_x$ setzt, die successiven Differenzen bildet und zuletzt $x = \theta$ setzt.

(31). Man soll die successiven Differenzen von $x^2, x^3, x^4, \ldots x^n$ und das Gesetz der Coefficienten finden:

$\triangle \,.\, x^2 = 2x + 1, \; \triangle^2 \,.\, x^2 = 2,$

$\triangle \,.\, x^3 = 3x^2 + 3x + 1, \; \triangle^2 \,.\, x^3 = 6x + 6, \; \triangle^3 \,.\, x^3 = 6,$

$\triangle \,.\, x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1, \; \triangle^2 \,.\, x^4 = 12x^2 + 24x + 14,$

$\triangle^3 \,.\, x^4 = 24x + 36, \; \triangle^4 \,.\, x^4 = 24,$

$$\triangle^n \,.\, x^m = \triangle^n o^m + \frac{m}{1} \triangle^n o^{m-1} \,.\, x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} \triangle^n o^{m-2} \,.\, x^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots(m-n)} \triangle^n o^n \,.\, x^{m-n}.$$

wo $\triangle^n o^m$ den Werth von $\triangle^n x^m$ für $x = 0$ bedeutet, und bekanntlich allgemein durch:

$$\triangle^n 0^m = n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^m$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(n-3)^m + \ldots$$

ausgedrückt wird. —

(32). Man soll die Richtigkeit der beiden folgenden Theoreme nachweisen:

$$(\sin\theta)^n \,.\, \cos n\,\theta =$$

$$\theta^n \,.\, \left\{1 - \frac{\Delta^n\, o^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)}(2\,\theta)^2 + \frac{\Delta^n\, o^{n+4}}{1\ldots(n+4)}(2\theta)^4 - \&c.\right\}$$

$$(\sin\theta)^n \,.\, \sin n\theta =$$

$$\theta^n \,.\, \left\{\frac{\Delta^n\, o^{n+1}}{1\ldots(n+1)}(2\theta) - \frac{\Delta^n\, o^{n-3}}{1\ldots(n+3)}(2\theta)^3 + \&c.\right\}.$$

Diese beiden Gleichungen ergeben sich aus der für $\Delta^n u_x$, wenn man successive $\sin x\theta$, $\cos x\theta$ für $u_x$ und für $\Delta^n \sin x\theta$, $\Delta^n \cos x\theta$ ihre Werthe aus Beispiel 3 setzt. —

Da die in der Form $\Delta^n o^m$ enthaltenen Zahlen sehr oft in der Theorie der Reihen vorkommen und bei der Entwickelung der Functionen so viele Erleichterung gewähren, so wird es nicht unzweckmäßig sein, eine Tafel dieser Zahlenwerthe bis $\Delta^{10} o^{10}$ und einige Beispiele der merkwürdigsten Eigenschaften derselben hier mitzutheilen, woraus die weitere Anwendung genügend erhellet. —

| | $\Delta$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ | $\Delta^4$ | $\Delta^5$ | $\Delta^6$ | $\Delta^7$ | $\Delta^8$ | $\Delta^9$ | $\Delta^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0^1$ | 1 | | | | | | | | | |
| $0^2$ | 1 | 2 | | | | | | | | |
| $0^3$ | 1 | 6 | 6 | | | | | | | |
| $0^4$ | 1 | 14 | 36 | 24 | | | | | | |
| $0^5$ | 1 | 30 | 150 | 240 | 120 | | | | | |
| $0^6$ | 1 | 62 | 540 | 1560 | 1800 | 720 | | | | |
| $0^7$ | 1 | 126 | 1806 | 8400 | 16800, | 15120 | 5040 | | | |
| $0^8$ | 1 | 254 | 5796 | 40824 | 126000 | 191520 | 141120 | 40320 | | |
| $0^9$ | 1 | 510 | 18150 | 186480 | 834120 | 1905120 | 2328480 | 1451520 | 362880 | |
| $0^{10}$ | 1 | 1022 | 55980 | 818520 | 5103000 | 16435440 | 29635200 | 30240000 | 16329600 | 3628800 |

Aus dieser Tafel sieht man: daß die Werthe von $\Delta^n o^m$ mit den Werthen von $n$ und $m$ zunehmen; aber weit mehr mit den Werthen von $m$, als mit denen von $n$. — Die Werthe von $\Delta^n o^n$, $\Delta^n o^{n+1}$, $\Delta^n o^{n+2}, \ldots$ nehmen in einem weit rapidern Verhältniß zu, als die Glieder irgend einer geometrischen Progression, und überschreiten zuletzt jede angebbare Grenze. —

(33). Man soll die Näherungswerthe von $\Delta^n o^n$, $\Delta^n o^{n+1}$ $\Delta^n o^{n+2}, \ldots$ angegeben, wenn $n$ eine sehr große Zahl ist. —

Auflösung. — Zu dem Zwecke braucht man nur $(e^t - 1)^n$ oder:

$$t^n \left\{ 1 + \left( \frac{t^2}{1.2} + \frac{t^3}{1.2.3} + \&c. \right) \right\}^n$$

zu entwickeln und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $t$ mit denen der gleichhohen Potenzen von $t$ in der Reihe:

$$t^n \left\{ \frac{\Delta^n o^n}{1 \ldots n} + \frac{\Delta^n o^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} t + \&c. \right\}$$

zu vergleichen, wodurch sich ergibt:

$$\Delta^n o^n = 1.2 \ldots n,$$

$$\Delta^n o^{n+1} = 1.2 \ldots (n+1) \times \frac{n}{2},$$

$$\Delta^n o^{n+1} = 1.2 \ldots (n+2) \times \frac{3n^2+n}{24},$$

$$\Delta^n o^{n+3} = 1.2 \ldots (n+3) \times \frac{n^3+n^2}{48},$$

$$\Delta^n o^{n+4} = 1.2 \ldots (n+4) \times \frac{15n^4 + 30n^3 + 5n^2 - 2n}{5760}, \&c.$$

Wenn $n$ wächst, so nehmen diese Functionen wie die Glieder s. g. hypergeometrischer Reihen zu, und wenn $n$ sehr groß ist; so ergibt sich durch Anwendung der bekannten Näherungsformeln:

$$\Delta^n o^n = \sqrt{(2\pi)} \,.\, n^{\frac{1}{2}} \,.\, \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\Delta^n o^{n+1} = \frac{\sqrt{(2\pi)} \cdot n^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

$$\Delta^n o^{n+2} = \frac{\sqrt{(2\pi)} \cdot n^{\frac{3}{2}}}{8} \cdot \left(\frac{n+2}{e}\right)^{n+2}; \text{ \&c.}$$

oder auch:

$$(n+1)^n = e \cdot n^n, \ (n+2)^n = e^2 \cdot n^n, \text{ \&c.}$$

$$\Delta^n o^n = \sqrt{(2\pi)} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\Delta^n o^{n+1} = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{2} \cdot n^{\frac{5}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\Delta^n o^{n+2} = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{8} \cdot n^{\frac{9}{2}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\Delta^n o^{n+3} = \frac{\sqrt{(2\pi)}}{48} \cdot n^{\frac{13}{2}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n; \text{ \&c.}$$

Wenn genauere Werthe verlangt werden, so müssen die nach Potenzen von $\frac{1}{n}$ fortlaufenden Reihen in Betracht gezogen werden.

(34). Man soll folgende Gleichung ableiten:

$$u_{x+n} = u_x + \frac{n}{1} \Delta u_{x-1} + \frac{n(n+1)}{1.2} \Delta^2 u_{x-2} + \\ + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \Delta^3 u_{x-3} + \text{\&c.}$$

Auflösung. Wenn $\varphi(t)$ die erzeugende Function von $u_x$ ist, so ist $\frac{1}{t^n} \varphi(t)$ die von $u_{x+n}$ oder von:

$$\left\{1 - t\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right\}^n \cdot \varphi(t)$$

Entwickelt man diesen letzten Ausdruck und geht von der erzeugenden Function zu den Coefficienten von $t^n$ in ihrer Entwickelung über; so ergibt sich die gesuchte Gleichung. —

(35). Man soll folgende allgemeine Gleichung herleiten:

$$u_{x+n} = u_x + \frac{n}{1} \Delta u_{x-r} + \frac{n(n+2r-1)}{1.2} \Delta^2 u_{x-2r} +$$

$$+ \frac{n(n+3r-1)(n+3r-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_{x-3r} + \&c.$$

Auflösung. Die erzeugende Function $\frac{1}{t^n} \varphi(t)$ von $u_{x+n}$ muß in eine Reihe von Gliedern von der Form:

$$\left\{ t^r \left( \frac{1}{t} - 1 \right) \right\}^i . \varphi(t),$$

entwickelt werden, und dann muß gezeigt werden, daß ihre Coefficienten mit denen der gegebenen Reihe übereinstimmen. — Um $t^{-n}$ nach Potenzen von $t^r \left( \frac{1}{t} - 1 \right) = z$ zu entwickeln, muß man $\left( \frac{1}{t} \right)^n$ nach Potenzen von $z$ entwickeln, und da $\frac{1}{t}$ eine durch die Gleichung:

$$t^r \left( \frac{1}{t} - 1 \right) = z$$

oder:

$$\frac{1}{t} = 1 + z . \left( \frac{1}{t} \right)^r,$$

gegebene Function von $z$ ist; so hat man für $y = \frac{1}{t}$ die Gleichung:

$$1 - y + zy^r = 0$$

deren Entwickelung nach dem Lagrange'schen Theoreme gibt:

$$y^n = \frac{1}{t^n} = 1 + \frac{n}{1} z + \frac{n(n+2r-1)}{1.2} z^2 + \&c.$$

woraus:

$$u_{x-n} = u_x + \frac{n}{1} \Delta u_{x-r} + \frac{n(n+2r-1)}{1.2} \Delta^2 u_{x-2r} +$$

$$+ \frac{n(n+3r-1)(n+3r-2)}{1.2.3} \Delta^2 u_{x-3r} + \&c.$$

folgt. —

# Zweiter Abschnitt.

## Beispiele für die Zerlegung der Functionen in zur Integration geeignete Factoriellen.

(1). Man soll $x^2, x^3, x^4, \ldots x^n$ in Summen von Producten aus den abnehmenden Factoren $x$, $x-1$, $x-2$, verwandeln:

$$x^2 = x + x(x-1)$$

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

$$x^4 = x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x^n = \frac{\triangle o^n}{1} x + \frac{\triangle o^n}{1.2} x(x-1) + \frac{\triangle^3 o^n}{1.2.3} x(x-1)(x-2) + \&c.$$

Der allgemeine Ausdruck ergibt sich aus:

$$u_{y-x} = u_y + \frac{x}{1} \triangle u_y + \frac{x(x-1)}{1.2} \triangle^2 u_y + \&c.$$

wenn man $u_y = y^n$ und dann $y = o$ setzt. — Die Werthe von $\triangle o^n$, $\triangle^2 o^n$, ... können, wenn $n$ nicht größer als 10 ist, aus der Tafel in Abschnitt 1 genommen werden. —

(2). Man soll $x^2, x^3, x^4, \ldots x^n$ in Aggregate von Producten aus den zunehmenden Factoren $x+1$, $x+2, \ldots$ verwandeln:

$$x = -1 + (x+1)$$

$$x^2 = +1 - 3(x+1) + (x+1)(x+2)$$

$$x^3 = -1 + 7(x+1) - 6(x+1)(x+2) + (x+1)(x+2)(x+3)$$

$$x^4 = +1 - 15(x+1) + 25(x+1)(x+2) - 10(x+1)\ldots(x+3) + \\ + (x+1)\ldots(x+4)$$

$$x^n = (-1)^n \left\{ \frac{\Delta o^{n+1}}{1} - \frac{\Delta^2 o^{n+1}}{1.2}(x+1) + \frac{\Delta^3 o^{n+1}}{1.2.3}(x+1)(x+2) - \&c. \right\}.$$

Der letzte allgemeine Ausdruck ergibt sich aus dem von $u_{y+x}$, wenn man $-x$ für $x$ und $u_y = y^{n+1}$ setzt, und dann wie vorhin verfährt.

(3). Da es von Wichtigkeit ist, daß die Zahlencoefficienten in den Factoriellen so klein als möglich ausfallen, so muß man solches durch eine passende Verbindung der kleinern Factoren $x-1$, $x-2, \ldots$ mit den größern $x+1$, $x+2, \ldots$ zu erreichen suchen:

$$x^3 = (x-1)\,x\,(x+1) + x.$$

$$x^5 = (x-2)(x-1)\,x\,(x+1)(x+2) + 5\,(x-1)\,x\,(x+1) + x.$$

$$x^7 = (x-3)\ldots(x+3) + 14\,(x-2)\ldots(x+2) + \\ + 21\,(x-1)\,x(x+1) + x.$$

Es ist zu bemerken, daß hierbei immer nur Factoriellen mit einer ungeraden Anzahl von Factoren vorkommen, was eine wesentliche Vereinfachung ist, und sich leicht allgemein für $x^{2n+1}$ nachweisen läßt. —

(4). Man soll $x^{2n+1}$ auf die letzte Weise transformiren und das Bildungsgesetz der Coefficienten finden. —

Auflösung. Man setze $x^2 = v$, also $x^{2n+1} = v^n x$, und:

$$v^n = A_0 + A_1\,(v-1) + A_2\,(v-1)(v-4) + \\ + A_3\,(v-1)(v-4)(v-9) + \ldots A_n\,(v-1)(v-4)\ldots(v-n^2).$$

Diese letzte Annahme ist zuläßig, weil der zweite Theil eine ganze rationale Function des $n^{ten}$ Grades von $v$ ist, welche nach Potenzen von $v$ entwickelt und mit $v^n$ verglichen, $n+1$ Gleichungen des ersten Grades zur Bestimmung der $n+1$ unbekannten Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ gibt.

Das folgende Verfahren ist jedoch bequemer und eleganter. Da nämlich die letzte Gleichung eine identische sein, also für belie-

bige Werthe von $v$ stattfinden muß; so darf man für $v$ auch successive die Zahlen 1, 4, 9, 25,... setzen, so daß man hat:

$$1^{2n} = A_0,$$

$$2^{2n} = A_0 + (2^2 - 1^2) A_1,$$

$$3^{2n} = A_0 + (3^2 - 1^2) A_1 + (3^2 - 1^2)(3^2 - 2^2) A^2$$

$$\&c. = \&c.$$

woraus folgt:

$$A_0 = 1^{2n},$$

$$A_1 = \frac{2^{2n}}{2^2 - 1^2} + \frac{1^{2n}}{1^2 - 2^2},$$

$$A_2 = \frac{3^{2n}}{(3^2-1^2)(3^2-2^2)} + \frac{2^{2n}}{(2^2-1^2)(2^2-3^2)} + \frac{1^{2n}}{(1^2-2^2)(1^2-3^2)},$$

&c. = &c.

Mit diesen Werthen von $A_0$, $A_1$, $A_2$, ..., deren Bildungsgesetz evident ist, hat man also:

$$x^{2n+1} = xv^n = x\,\{A_0 + A_1 (x^2 - 1^2) + A_2 (x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) + \&c.\}$$

$$= A_0\, x + A_1 (x - 1)\, x\, (x + 1) + \&c$$

Das sehr merkwürdige Bildungsgesetz der Coefficienten läßt sich mit geringen Modificationen leicht auf Fälle von größerer Allgemeinheit ausdehnen, und es wird nicht unzweckmäßig sein, noch die folgenden Aufgaben hier zu lösen:

(5). Man soll eine beliebige Function $F(x)$ in folgender Form entwickeln:

$$F(x) = A_0 + A_1 (x - f_1) + A_2 (x - f_1)(x - f_2) + \&c.$$

wo $f_1$, $f_2$, $f_3$, ... particuläre Werthe irgend einer andern Function $f_x$ bedeuten, welche den Werthen 1, 2, 3, ... von $x$ entsprechen. —

Auflösung. Auf ganz ähnliche Weise, wie vorhin, d. h. indem man successive $f_1$, $f_2$, $f_3$, ... für $x$ substituirt ꝛc. ergibt sich sofort:

$$A_0 = F(f_1),$$

$$A_1 = \frac{F(f_1)}{f_1 - f_2} + \frac{F(f_2)}{f_2 - f_1},$$

$$A_2 = \frac{F(f_1)}{(f_1-f_2)(f_1-f_3)} + \frac{F(f_2)}{(f_2-f_1)(f_2-f_3)} + \frac{F(f_3)}{(f_3-f_1)(f_3-f_2)},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A_{n-1} = \frac{F(f_1)}{(f_1-f_2)(f_1-f_3)..(f_1-f_n)} + \frac{F(f_2)}{(f_2-f_1)(f_2-f_3)...(f_2-f_n)} + ..$$

$$.... + \frac{F(f_n)}{(f_n-f_1)(f_n-f_2)...(f_n-f_{n-1})}.$$

Hieraus ergibt ferner: 1) Wenn $F(x)$ eine ganze ratianale Function von $x$ vom $n^{ten}$ Grade und $f_x$ eine beliebige Function von $x$ ist; so ist leicht einzusehen, daß $A_{n+1} = 0$, $A_{n+2} = 0, \ldots$ wird, worin eine der allgemeinsten Eigenschaften der ganzen rationalen Function besteht. — 2) Wenn $F(x) = x^n$ und $f_x = x^2$ ist, so erhält man die Coefficienten der letzten Aufgabe. — 3) Wenn $F(x)$ eine ganze, rationale Function von $x$ ist, und $f_x = x^2$; so erhält man die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ für die Entwickelung der Function $x.F(x^2)$ in die Form:

$$A_0 x + A_1 (x-1) x (x+1) + \&c.$$

welche oft sehr zweckmäßig ist. — 4) Wenn $F(x)$ wieder eine ganze, rationale Function von $x$ und $f_x = \pm x$ ist, so erhält man allgemeine Formeln für die Umformung irgend einer rationalen Function in Factoriellen mit ab- oder zunehmenden Factoren. — 5) Wenn $F(x) = (1+a)^x$ und $f_x = x$ ist, so erhält man das Binomialtheorem. — Hieraus sieht man, daß diese Transformationsart kein bloßes zweckloses Zeichenspiel ist, und es werden bald noch weitergreifende Anwendungen davon vorkommen. —

(6.) Man soll die geraden Potenzen $x^2, x^4, \ldots x^{2n}$ von $x$ in Factoriellen umsetzen, worin die ab- und zunehmenden Factoren symmetrisch vorkommen. —

Auflösung. Dieses kann offenbar bei den Factoren $x \pm 1$, $x \pm 2, \ldots$ nicht geschehen, weil der Grad des Ausdruckes:

$$A_0 x + A_1 (x-1) x (x+1) + \&c.$$

nothwendig eine **ungerade** Zahl ist. — Aber mittelst der Factorn:

$$x \pm \frac{1}{2}, x \pm \frac{3}{2}, \ldots$$

erreicht man diesen Zweck, und erhält:

$$x^2 = \frac{1}{4}\{1 + (2x-1)(2x+1)\},$$

$$x^4 = \frac{1}{16}\{1 + 10(2x-1)(2x+1)$$
$$+ (2x-3)(2x-1)(2x+1)(2x+3)\}$$

$$x^6 = \frac{1}{64}\{1 + 91(2x-1)(2x+1) + 35(2x-3)\ldots(2x+3)$$
$$+ (2x-5)\ldots(2x+5)\}.$$

Für $x^{2n}$ setze man: $(2x)^2 = v$, $F(v) = v^n$ und $f_v = (2v-1)^2$; so wird:

$$f_1 = 1^2, f_2 = 3^2, f_3 = 5^2, \&c.$$

$$F(f_1) = 1^{2n}, F(f_2) = 3^{2n}, F(f_3) = 5^{2n}, \&c.,$$

und mithin nach der vorhergehenden Nummer:

$$v^n = A_0 + A_1(v-1^2) + A_2(v-1^2)(v-3^2) + \&c.$$

$$A_0 = 1^{2n},$$

$$A_1 = \frac{1^{2n}}{1^2-3^2} + \frac{3^{2n}}{3^2-1^2},$$

$$A_2 = \frac{1^{2n}}{(1^2-3^2)(1^2-5^2)} + \frac{3^{2n}}{(3^2-1^2)(3^2-5^2)} + \frac{5^{2n}}{(5^2-1^2)(5^2-3^2)}.$$

&c. &c.

Wegen $(2x)^2 = v$ ist aber $x^{2n} = \frac{v^n}{2^{2n}}$ und:

$$v = 1^2 = \{\sqrt{(v)} - 1\}\{\sqrt{(v)} + 1\} = (2x-1)(2x+1), \&c.$$

also endlich:

$$x^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\{A_0 + A_1(2x-1)(2x+1)$$
$$+ A_2(2x-3)\ldots(2x+3) + \&c.\}.$$

In gleicher Weise kann eine beliebige gerade Function $F(x^2)$ von $x$ behandelt werden. —

(7.) Man soll die Factoriellen:

$$x(x+1)(x+3),\ \text{und}\ (2x-1)\,2x+1)(2x+5)$$

ergänzen, d. h. in die folgenden umsetzen:

$$x(x+1)+x(x+1)(x+2),$$
$$2(2x-1)(2x+1)+(2x-1)(2x+1)(2x+3),$$

worin die Factoren in arithmetischer Progression ab- oder zunehmen. —

(8). Man soll $(2x+3)^3$ und $(x+a)^3$ resp. in Factoriellen mit ab- und mit zunehmenden Factoren verwandeln. —

Es ist:

$$(2x-1)(2x-3)(2x-5)+18(2x-1)(2x-3)+$$
$$+76(2x-1)+64=(2x+3)^2$$
$$(x+a)^2=(a-1)^2+(2a-3)(x+1)+(x+1)(x+2).$$

(9.) Man soll $x(x^2+2)^2$ in Factoriellen umsetzen, worin die ab- und zunehmenden Factoren symmetrisch erscheinen.

Es ist:

$$x(x^2+2)^2=9x+9(x-1)(x)(x+1)$$
$$+(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2).$$

(10.) Ebenso soll man $(x^3+x)(2x^2-6)^3$ transformiren.

Man findet:

$$(x^3+x)(2x^2-6)^3=-128x+56(x-1)x(x+1)$$
$$+424(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$$
$$+176(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)+$$
$$+(x-4)\ldots(x+4).$$

(11.) Man soll $(x^4+1)^2$ in den möglichst kleinsten Zahlen in vollständigen Factoriellen ausdrücken.

Man findet:

$$(x^4+1)^2 = \frac{1}{2^8}\{289 + 1140(2x-1)(2x+1)$$
$$+ 998(2x-3)(2x-1)(2x+1)(2x+3)$$
$$+ 84(2x-5)\ldots(2x+5) + (2x-7)\ldots(2x+7)\}.$$

(12). Man soll $u_{x+1} . u_{x+3}$ in $u_x u_{x+1} + 3hu_x$ umsetzen, indem $u_x = a + hx, \Delta u_x = h$ ist. —

(13.) Unter derselben Voraussetzung soll gezeigt werden, daß:

$$u_x u_{x+1} - 2h . u_x + 6h^2 = u_{x-3} u_{x+2}$$

ist. —

(14.) Ebenso daß:

$$(u_{x-1})^2 . (u_{x+1})^2 =$$
$$u_{x+1} \ldots u_{x+4} - 10h . u_{x+1} \ldots u_{x+3}$$
$$+ 23h^2 . u_{x+1} u_{x+2} - 9h^3 . u_{x+1}$$

ist. —

(15.) Ferner soll man für denselben Werth von $u_x$ den Ausdruck:

$$u_{x-1} u_{x+2} u_{x+3}$$

in:

$$u_x u_{x+1} u_{x+2} + h . u_x u_{x+1} - 2h^2 . u_x - 6h^3$$

umformen. —

(16.) Man soll:

$$u_x u_{x+1} u_{x+2} u_{x+4} u_{x+5}$$

in:

$$u_x \ldots u_{x+4} + 2hu_x \ldots u_{x+3} + 2h^2 u_x \ldots u_{x+2}$$

umsetzen. —

(17.) Ebenso:

$$u_x \ldots u_{x+n-1} \times u_{x+n+1} \ldots u_{x+m}$$

in:

$$u_x \ldots u_{x+m-1} + (m-n)h \,.\, u_x \ldots u_{x+m-2}$$
$$+ (m-n)(m-n-1)h^2 \,.\, u_x \ldots u_{x+m-3}$$
$$+ \ldots + (m-n) \ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 h^{m-n} u_x \ldots u_{x+n-1} \,.$$

(18.) Ferner:

$$u_{x-2}\, u_{x-1}\, u_{x+1}$$

in:

$$u_x\, u_{x+1}\, u_{x+2} - 5h\, u_x\, u_{x+1} + 2h^2\, u_x + 2h^3.$$

(19.) Desgleichen:

$$u_x^2 \,.\, u_{x+1}^3$$

in:

$$u_{x-2} \ldots u_{x+2} + 3h\, u_{x-1} \ldots u_{x+2}$$
$$+ 2h^2\, u_{x-1}\, u_x\, u_{x+1} + 4h^3\, u_x\, u_{x+1} \,.$$

(20.) Ebenso:

$$u_{x+1} \ldots u_{x+n}$$

in:

$$u_{x+1} \ldots u_{x+n} = u_x \ldots u_{x+n-1} + nh\, u_x \ldots u_{x+n-2} +$$
$$+ n(n-1)h^2 u_x \ldots u_{x+n-3} + \ldots + n(n-1) \ldots 1 \,.\, h^n \,.$$

(21.) Weiter:

$$u_x \ldots u_{x+n}$$

in:

$$u_x \ldots u_{x+n} = u_{x+m} \ldots u_{x+m+n}$$
$$- \frac{(n+1) \,.\, m}{1} h u_{x+m+1} \ldots u_{x+m+n}$$
$$+ \frac{(n+1) \,.\, n \times m(m+1)}{1 \,.\, 2} h^2 u_{x+m+2} \ldots u_{x+m+n}$$
$$- \frac{(n+1)n(n-1) \times m(m+1)(m+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} h^3 \,.\, \&c. + \&c.$$

was leicht geschehen kann, wenn man wie Absch. 2. Aufg. 4 verfährt, indem man setzt:

$$u_x \ldots u_{x+n} = A\, u_{x+m} \ldots u_{x+m+n}$$
$$+ B\, u_{x+m+1} \ldots u_{x+m+n} + \&c.,$$

und dann successive:

$$u_{x+m+1}\,,\; u_{x+m+2},\; \&c.$$

verschwinden läßt, wodurch man so viele Gleichungen erhält, als Coefficienten $A, B, \ldots$ zu finden sind.

(22.) Man soll zeigen, daß:

$$u_{x+\alpha}\, u_{x+\beta} = u_x\, u_{x+1} + (\alpha + \beta - 1)\, h u_x + \alpha\,\beta\,.\,h^2.$$

ist. —

(23.) Ebenso daß:

$$u_{x+\alpha}\, u_{x+\beta}\, u_{x+\gamma} = u_x\, u_{x+1}\, u_{x+2} + (\alpha + \beta + \gamma - 3)\, h u_x\, u_{x+1} +$$
$$+ (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 1)\, h^2 u_x + \alpha\beta\gamma\,.\,h^3.$$

ist. —

(24.) Wenn: $S_0 = 1$

$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \&c.$$
$$S_2 = \alpha\,\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \&c.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = \alpha\,\beta\,\gamma\, \&c.$$

ist, zu beweisen, daß:

$$u_{x+\alpha}\,.\,u_{x+\beta}\,.\,u_{x+\gamma}\,.\,\&c. = h^n\, S_n$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1}\, u_x \left\{\triangle o\,.\,S_{n-1} - \triangle o^2\,.\,S_{n-2} + \triangle o^3\,.\,S_{n-3} - \&c.\right\}$$
$$+ \frac{h^{n-2}}{1\,.\,2}\, u_x\, u_{x+1} \left\{\triangle^2 o^2\,.\,S_{n-2} - \triangle^2 o^3\,.\,S_{n-3} + \&c\right\}$$
$$+ \frac{h^{n-3}}{1\,.\,2\,.\,3}\, u_x\, u_{x+1}\, u_{x+2} \left\{\triangle^3 o^3\,.\,S_{n-3} - \&c.\right\} + \&c.$$

ist, wo die Glieder: $\triangle o^0\,.\,S_n$, $\triangle^2 o^0\,.\,S_n - \triangle^2 o^1\,.\,S_{n-1}$ &c. in den Coefficienten von: $\frac{h^{n-1}}{1}\, u_x$, $\frac{h^{n-2}}{1\,.\,2}\, u_x\, u_{x+1}$ &c, welche an und für sich Null sind, der Kürze wegen hinweggelassen sind. Ebenso ist in allen ähnlichen Fällen zu bemerken: daß $\triangle^0 o^0 = 1$, $\triangle o^0 = 0$, $\triangle^2 o^0 = 0$, $\triangle^2 o^1 = 0$, $\triangle^3 o^0 = o$, $\triangle^3 o^1 = 0$, $\triangle^3 o^2 = 0$, &c. ist. —

Auflösung. Man setze: $u_{x+\alpha}\, u_{x+\beta}\, u_{x+\gamma}$ &c. $= A_0 + A_1 u_x + A_2\, u_x\, u_{x+1} +$ &c. und nehme für $x$ successive die Werthe:

$-\frac{a}{h}, -\left(\frac{a}{h}+1\right), -\left(\frac{a}{h}+2\right)$, so daß die Factoren $u_x, u_{x+1}$, ... successive verschwinden, wodurch die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ nacheinander bestimmt werden, wie Abschn. 2. Aufg. 4. — Oder man setze: $v = hx$, $F(v) = u_{x+\alpha} \cdot u_{x+\beta}$ &c., oder endlich:

$$F(v) = (v + a + \alpha h)(v + a + \beta h) \text{ . \&c.}$$

und:

$$f_x = -a - (x-1)h,$$

substituire diese Werthe in die allgemeinen Werthe der Coefficienten und reducire. —

Einige specielle Fälle des letzten allgemeinen Theoremes mögen hier noch näher betrachtet werden, weil sich dabei Transformationen darbieten, wovon später Anwendung gemacht werden wird. —

(25.) Wenn $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1$ ist, so hat man:

$$u^n{}_{x+1} = h^n + \frac{h^{n-1}}{1} u_x \times$$

$$\left\{ \frac{n}{1} \Delta o - \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta o^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta o^3 - \text{\&c.} \right\}$$

$$+ \frac{h^{n-2}}{1.2} u_x u_{x+1} \times$$

$$\left\{ \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 o^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^2 o^3 - \text{\&c.} \right\}$$

$$+ \frac{h^{n-3}}{1.2.3} u_x u_{x+1} u_{x+2} \times$$

$$\left\{ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 o^3 - \text{\&c.} \right\} + \text{\&c.}$$

Dieses ist jedoch weder die einfachste, noch die eleganteste Form, in welcher diese Gleichung ausgedrückt werden kann. —

Wenn man nämlich die in den Klammern stehenden Reihen ergänzt, indem man die fehlenden Anfangsglieder einsetzt, und dann die Operations- und Quantitätssymbole trennt; so erhält man:

$$-\triangle\left\{1-\frac{n}{1}o+\frac{n(n-1)}{1.2}o^2-\&c.\right\}=-\triangle(1-0)^n$$

$$+\triangle^2\left\{1-\frac{n}{1}o+\frac{n(n-1)}{1.2}o^2-\&c.\right\}=+\triangle^2(1-0)^n,\&c.$$

In Abschn. 7 Nr. 7 wird aber gezeigt werden, daß die Ausdrücke: $\triangle(1-0)^n$, $\triangle^2(1-0)^n$, &c. resp. gleich:

$$(-1)^n.\{\triangle o^n-\triangle^2 o^n+\triangle^3 o^n\ldots\pm\triangle^n o^n\},$$

$$(-1)^n.\{\triangle^2 o^n-\triangle^3 o^n+\ldots\quad\mp\triangle^n o^n\},$$

$$(-1)^n.\{\triangle^3 o^n\ldots\quad\pm\triangle^n o^n\},\text{ etc.}$$

oder:

$$-\triangle^n o^n+\triangle^{n-1}o^n+\ldots\pm\triangle o^n$$

$$+\triangle^n o^n-\triangle^{n-1}o^n+\ldots\pm\triangle^2 o^n,\&c.$$

sind, so daß man durch Substitution dieser Werthe erhält:

$$u^n{}_{x+1}=h^n+\frac{\triangle^n o^n-\triangle^{n-1}o^n+\ldots\pm\triangle o^n}{1}h^{n-1}u_x$$

$$+\frac{\triangle^n o^n-\triangle^{n-1}o^n+\ldots\mp\triangle^2 o^n}{1.2}h^{n-2}u_x\,u_{x+1}$$

$$+\frac{\triangle^n o^n-\triangle^{n-1}o^n+\ldots\pm\triangle^3 o^n}{1.2.3}h^{n-3}u_x\,u_{x+1}u_{x+2}$$

$$+\&c.$$

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß Ausdrücke wie $\triangle(1-0)^n$ nur Abkürzungen sind, und außer dem, was durch ihre Entwickelung ausgedrückt wird, keine Bedeutung haben. —

Die letzte Transformation ist jedoch ohne vorläufige Kenntniß der mehr allgemeinen Eigenschaften der Function $\triangle^m o^n$, wovon später die Rede sein wird, nicht verständlich, und ist hier nur mitgetheilt, um das zu demselben Gegenstande Gehörige vereinigt zu haben. —

(26.) Es ist:

$$u_x{}^n = (-1)^{n+1}\left\{\frac{\Delta o^n}{1} h^{n-1} u_x - \frac{\Delta^2 o^n}{1.2} h^{n-2} u_x u_{x+1} + \&c.\right\}; \ldots (\alpha.)$$

Setzt man hierin $n+1$ für $n$ und dividirt mit $u_x$, so ergibt sich:

$$u^n{}_x = (-1)^n \left\{\frac{\Delta o^{n+1}}{1} h^n - \frac{\Delta^2 o^{n+1}}{1.2} h^{n-1} u_{x+1}\right.$$

$$\left. + \frac{\Delta^3 o^{n+1}}{1.2.3} h^{n-2} u_{x+1} u_{x+2} - \&c.\right\}; \ldots (b).$$

(27.) Wenn $u_x = a + hx$ und $u'_x = a' + h'x$ ist, den Ausdruck $(u_x)^n$ so zu entwickeln, daß die Factoren $u'_x$, $u'_{x+1}$, $u'_{x+2}, \ldots$ in den successiven Gliedern erscheinen.

Auflösung. Es ist:

$$(a + hx)^n = \left(\frac{h}{h'}\right)^n . \left(\frac{ah'}{h} + h'x\right)^n$$

$$= \left(\frac{h}{h'}\right)^n . \left\{(a' + h'x) + h' . \frac{ah' - a'h}{hh'}\right\}^n$$

oder:

$$(u_x) = \left(\frac{h}{h}\right)^n . (u'_{x+\alpha})^n$$

wo:

$$\alpha = \frac{ah' - ha'}{hh'} = \frac{a}{h} - \frac{a'}{h'}.$$

und wenn man in:

$$u_{x+\alpha} . u_{x+\beta} . u_{x+\gamma} . \&c. = h^n S_n$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{1} u_x \{\Delta o . S_{n-1} - \Delta o^2 . S_{n-2} + \Delta o^3 . S_{n-3} - \&c\}$$

$$+ \frac{h^{n-2}}{1.2} u_x u_{x+1} \{\Delta^2 o^2 . S_{n-2} - \Delta^2 o^3 . S_{n-3} + \&c\}$$

$$+ \frac{h^{n-3}}{1.2.3} u_x u_{x+1} u_{x+2} \{\Delta^3 o^3 . S_{n-3} - \&c\} + \&c.$$

also $u'_x$ für $u_x$, so wie $\beta = \gamma = \ldots = \alpha$ setzt; so folgt:

$$u_x{}^n = \left(\frac{h}{h'}\right)^n \left\{ h'^n . \alpha^n\right.$$

$$+ \frac{h'^{n-1}}{1} u'_x \left( \frac{n}{1} \alpha^{n-1} \Delta o - \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha^{n-2} \Delta o^2 + \text{\&c.} \right)$$

$$+ \frac{h'^{n-2}}{1.2} u'_x u'_{x+1} \left( \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha^{n-2} \Delta^2 o^2 - \text{\&c.} \right)$$

$$+ \text{\&c.} \Big\}$$

Es wird aber in Abschn. 7, Nr. 17 gezeigt werden, daß die Reihen:

$$- \Delta \left\{ \alpha^n - \frac{n}{1} \alpha^{n-1} . o + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha^{n-2} . o^2 - \text{\&c.} \right\},$$

$$+ \Delta^2 \left\{ \alpha^n - \frac{n}{1} \alpha^{n-1} . o + \frac{n(n-1)}{1.2} \alpha^{n-2} . o^2 - \text{\&c.} \right\}, \text{ \&c.}$$

welche durch Trennung der Operations- und Quantitätssymbole in den Coefficienten der verschiedenen Glieder $\frac{h'^{n-1}}{1} u'_x$, &c. erhalten werden, und deren abgekürzte Ausdrücke resp. sind:

$$- \Delta (\alpha - o)^n, + \Delta^2 (\alpha - o)^n, \text{ \&c.}$$

andern Reihen gleichbedeutend sind, deren abgekürzte (symbolische) Ausdrücke resp.:

$$(-1)^{n+1} \frac{\Delta}{(1+\Delta)^\alpha} o^n, (-1)^{n+2} . \frac{\Delta^2}{(1+\Delta)^\alpha} o^n,$$

$$(-1)^{n+3} . \frac{\Delta^3}{(1+\Delta)^a} o^n, \text{ \&c.}$$

sind, während die Reihen selbst sind:

$$(-1)^{n+1} \left\{ \Delta o^n - \frac{\alpha}{1} \Delta^2 o^n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \Delta^3 o^n \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \pm \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n-2)}{1.2\ldots\ldots(n-1)} \Delta^n o^n \right\},$$

$$(-1)^{n+2} \left\{ \Delta^2 o^n - \frac{a}{1} \Delta^3 o^n \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \pm \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots\ldots(\alpha+n-3)}{1.2\ldots\ldots(n-2)} \Delta^n o^n \right\}, \text{ \&c.}$$

und daß $\alpha^n$ gleich $(-1)^n \cdot \frac{1}{(1+\triangle)^\alpha} o^n$ oder gleich der Reihe:

$$(-1)^n \left\{ o^n - \frac{\alpha}{1} \triangle o^n + \ldots \pm \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots n} \triangle^n o^n \right\}.$$

ist. —

Man erhält also endlich für die verlangte Entwickelung:

$$u_x{}^n = \left(-\frac{h'}{h}\right)^n \cdot \left\{ \frac{1}{(1+\triangle)^\alpha} o^n . h'^n - \frac{\triangle}{(1+\triangle)^\alpha} o^n . \frac{h'^{n-1}}{1} u'_x \right.$$
$$\left. + \frac{\triangle^2}{(1+\triangle)^\alpha} o^n . \frac{h'^{n-2}}{1.2} u'_x u'_{x+1} - \&c. \right\}$$

welche unendlich viele verschiedene Mittel und Wege zur Transformation eines gegebenen Ausdrückes dieser Art darbietet; z. B.:

$$(x+\alpha)^n = (-1)^n \cdot \left\{ \frac{1}{(1+\triangle)^\alpha} o^n - \frac{\triangle}{(1+\triangle)^\alpha} o^n . \frac{x}{1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\triangle^2}{(1+\triangle)^\alpha} o^n . \frac{x(x+1)}{1.2} - \&c. \right\}.$$

---

# Dritter Abschnitt.

## Beispiele zur Reduction gebrochener Ausdrücke auf integrabele Formen.

Es ist:

(1). $$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{3}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

(2). $$\frac{1}{(x+1)(x+3)}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

(3). $$\frac{u_{x+1}}{u_x\, u_{x+2}\, u_{x+3}}=\frac{1}{u_x\, u_{n+1}}-\frac{3h}{u_x\, u_{x+1}\, u_{x+2}}$$

$$+\frac{4h^2}{u_x \ldots u_{x+3}},\ \text{wo } u_x=a+hx.$$

(4). $$\frac{(x+1)^2}{x(x+2)(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{6}{x(x+1)(x+2)}$$

$$+\frac{19}{x \ldots (x+3)}-\frac{27}{x \ldots (x+4)}.$$

(5). $$\frac{3x-4}{(4x^2-1)(2x-7)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$+\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{(2x-3)(2x-1)(2x+1)}+\frac{26}{(2x-5)\ldots(2x+1)}$$

$$+\frac{52}{(2x-7)\ldots(2x+1)}.$$

(6). Es ist:

$$\frac{1}{u_{x+n}}=\frac{1}{u_x}-\frac{nh}{u_x\, u_{x+1}}+\frac{n(n-1)h^2}{u_x\, u_{x+1}\, u_{x+2}}-\&c.$$

Dieses Resultat ergibt sich unmittelbar aus Nr. 21 in Abschn. 2, wenn man $m = 1$ und $n - 1$ für $n$ setzt, und dann die ganze Gleichung durch $u_x \ldots u_{x+n}$ dividirt. —

(7). Ein noch allgemeineres Theorem ist folgendes:

$$\frac{1}{u_{x+n}} = \frac{1}{u_{x+m}} - \frac{(n-m)h}{u_{x+m}\,u_{x+m+1}}$$

$$+ \frac{(n-m)(n-m-1)h^2}{u_{x+m}\,u_{x+m+1}\,u_{x+m+2}} - \text{\&c.}$$

welches sich ganz auf dieselbe Weise ergibt. Beide Theoreme rühren von Emerson her, und können zur leichten Reduction gewisser Klassen von Ausdrücken benutzt werden. Z. B.:

(8). Es soll $\frac{1}{u_{x-1}\,u_{x+2}}$ auf eine integrabele Form gebracht werden, so hat man:

$$\frac{1}{u_{x+2}} = \frac{1}{u_x} - \frac{2h}{u_x\,u_{x+1}} + \frac{2h^2}{u_x\,u_{x+1}\,u_{x+2}}$$

und folglich:

$$\frac{1}{u_{x-1}\,u_{x+2}} = \frac{1}{u_{x-1}u_x} - \frac{2h}{u_{x-1}\ldots\ldots u_{x+1}} + \frac{2h^2}{u_{x-1}\ldots u_{x+2}}.$$

(9) Es soll $\frac{1}{u_x\,.\,u_{x+1}\,.\,u_{x+5}}$ auf eine integrabele Form gebracht werden, so ist:

$$\frac{1}{u_{x+5}} = \frac{1}{u_{x+2}} - \frac{3h}{u_{x+2}\,.\,u_{x+3}} + \frac{6h^2}{u_{x+2}\,u_{x+3}\,u_{x+4}}$$

$$- \frac{6h^3}{u_{x+2}\,u_{x+3}\,u_{x+4}\,u_{x+5}},$$

und mithin:

$$\frac{1}{u_x\,u_{x+1}u_{x+5}} = \frac{1}{u_x\ldots u_{x+2}} - \frac{3h}{u_x\ldots u_{x+3}} + \frac{6h^2}{u_x\ldots u_{x+4}}$$

$$- \frac{6h^3}{u_x\ldots\ldots u_{x+5}}.$$

# Vierter Abschnitt.

## Beispiele zur Integration von Differenzengleichungen.

(1). Das vollständige Integral der Gleichung:

$$u_{x+1} - (x+1)\,u_x = 1\,.\,2\,\ldots\,(x+1)$$

ist:

$$u_x = (C + x) \times 1\,.\,2\,\ldots\ldots\,x,$$

wo $C$ die willkürliche Constante bedeutet. —

(2.) Von:

$$u_{x+1} - pa^{2x}\,u_x = qa^{x^2}$$

ist das Integral:

$$u_x = C\,.\,p^{x-1}\,.\,a^{x^2-x} + \frac{qa^{(x-1)^2}}{1-ap}\,.$$

(3). Von:

$$(x+1)^2\,\{u_{x+1} - au_x\} = a^x$$

ist das Integral:

$$u_x = C\,.\,a^x + a^{x-1}\,.\,\Sigma\,\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= C\,.\,a^x + a^{x-1}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ \frac{1}{x^2}\right\}.$$

In diesem letzten Beispiele läßt sich der Ausdruck $\frac{1}{(1+x)^2}$ nicht in geschlossener, endlicher Form integriren, wenn man denselben nicht in eine Reihe von einer veränderlichen Gliederzahl ausdrückt, wie hier geschehen ist — und man wird sehen, daß ein solches Resultat in vielen Fällen brauchbar und genügend ist. —

(4.) Das Integral der Gleichung:

$$u_{x+2} - pu_{x+1} + qu_x = 0$$

ist:

$$u_x = {}^1C \cdot \left\{ \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right\}^x + {}^2C \cdot \left\{ \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right\}^x$$

wo ${}^1C$, ${}^2C$ zwei arbiträre Constanten sind.

(5.) Das Integral der Gleichung:

$$u_{x+2} - a(x+2)\,u_{x+1} + b(x+1)(x+2)\,u_x = 0$$

ist:

$$u_x = 1 \,.\, 2 \ldots x \{ {}^1C \,.\, \alpha^x + {}^2C \,.\, \beta^x \}$$

wo $\alpha$, $\beta$ die Wurzeln der Gleichung $u^2 + au + b = 0$ bedeuten, und es wird erhalten, wenn man:

$$u_x = 1 \,.\, 2 \ldots x \times v_x$$

setzt. —

(6.) Das Integral der Gleichung:

$$u_{x+2} + ap^{2x} u_{x+1} + bp^{4x} u_x = cq^x \,.\, p^{x^2}$$

ist:

$$u_x = p^{x^2+x} \{ {}^1C \,.\, \alpha^x + {}^2C \,.\, \beta^x \} + \frac{cq^x\, p^{(x-2)^2}}{p^2 + apq + bp^4}$$

wo $\alpha$, $\beta$ die Wurzeln der Gleichung:

$$u^2 + \frac{a}{p^4}\, u + \frac{b}{p^6} = 0$$

bezeichnen. —

(7.) Das Integral der Gleichung:

$$u_{x+2} + a \,.\, \varphi(x+1)\, u_{x+1} + b \,.\, \varphi(x) \,.\, \varphi(x+1)\, u_x = c,$$

ist:

$$u_x = P\varphi(x-1) \times$$

$$\left\{ {}^1C\alpha^x + {}^2C\beta^x + \alpha^{x-1} \Sigma \,.\, \frac{\beta^{x-1}}{\alpha^x} \Sigma \frac{c}{\beta^x \,.\, P\varphi(x+1)} \right\},$$

wo $\varphi(x)$ eine beliebige Function, $P\varphi(x) = \varphi(1) . \varphi(2) .. \varphi(x)$ ist, und $\alpha$, $\beta$ die Wurzeln der Gleichung $u^2 + au + b = 0$ bedeuten. —

(8.) Das Integral der Gleichung:

$$u_{x+1} + ap^x u_{x+2} + bp^{2x} u_{x+1} + cp^{3x} u_x = 0$$

ist:

$$u_x = p^{\frac{x(x+1)}{2}} \{ {}^1C . \alpha^x + {}^2C . \beta^x + {}^3C . \gamma^x \}$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die drei Wurzeln der Gleichung:

$$u^3 + \frac{a}{p^3} u^2 + \frac{b}{p^5} u + \frac{c}{p^6} = 0$$

sind. —

(9.) Von:

$$u_{x+n} + ap^x u_{x+n-1} + bp^{2x} u_{x+n-2} + \ldots kp^{nx} u_x = 0$$

ist das Integral:

$$u_x = p^{\frac{x(x+1)}{2}} \{ {}^1C . \alpha^x + {}^2C . \beta^x + \ldots {}^nC . \nu^x \},$$

wo $\alpha, \beta, \ldots \nu$ die $n$ Wurzeln der Gleichung:

$$u^n + \frac{a}{p^n} u^{n-1} + \frac{b}{p^{2n-1}} u^{n-2} + \frac{c}{p^{3n-3}} u^{n-3} + \ldots \frac{k}{p^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 0$$

sind. —

(10.) Von:

$$u_{x+2} + au_{x+1} + bu_x = X_x$$

ist das Integral:

$$u_x = {}^1C . \alpha^x + {}^2C . \beta^x + \frac{1}{b} \alpha^x . \Sigma . \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x \Sigma \frac{X_x}{\beta^x},$$

wo $\alpha$, $\beta$ die Wurzeln der Gleichung $u^2 + au + b = 0$ bezeichnen.

(11.) Von:

$$\Delta^n u_x = X_x$$

ist das Integral:

$$u_x = {}^1C + {}^2C\,.\,x + {}^3C\,.\,x^2 + .\ .\ {}^nC\,.\,x^{n-1} + \Sigma^n X_x\,.$$

(12.) Von:

$$\Delta u_x + \Delta^2 u_x = 42 u_x$$

ist das Integral:

$$u_x = {}^1C\,.\,7^x + {}^2C\,.\,(-6)^x\,.$$

(13.) Als Integral der Gleichung:

$$(x+3)^2\,.\,u_{x+2} - 2\,\frac{(x+2)^2}{x+1}\,u_{x+1} + \frac{(x+1)^2(x+2)}{x}\,u_x = 0$$

wird mittelst des gegebenen particulären Integrales $u_x = \frac{x}{1+x}$ gefunden:

$$u_x = {}^1C\,.\,\frac{x}{x+1} + {}^2C\,.\left(\frac{x}{x+1}\right)^2.$$

(14.) Als Integral der Gleichung:

$$u_{x+1} - 2u^2_x + 1 = 0$$

ergibt sich mittelst der Substitution $u_x = \cos v_x$ das Resultat:

$$u_x = \tfrac{1}{2}\left\{C^{2^x} + C^{-2^x}\right\}.$$

(15.) Das Integral der Gleichung:

$$u^2_{x+1} - 4u^2_x\,(u^2_x + 1) = 0$$

ist:

$$u_x = \tfrac{1}{2}\left\{C^{2^x} - C^{-2^x}\right\},$$

indem man die Substitution $u_x = \sqrt{-1}\,\sin v_x$ anwendet. —

(16.) Um die Gleichung:

$$u^2_x - 4u_x\,u_{x+1} + a\,(2u_x + u_{x+1}) = 0,$$

zu integriren, setzt man zunächst $u_x = \frac{a}{2}\,.\,\frac{2v_x - 1}{v_x + 1}$ und in der resultirenden Gleichung $-\cos w_x$ für $v_x$; so nimmt letztere eine integrabele Form an. —

(17.) Die Gleichung:

$$u^2_x + 2u_x\, u_{x+1} - a\,(4u_x - u_{x+1}) = 0$$

wird durch die Substitution:

$$2\,a\,.\,\frac{v_x + 1}{2v_x - 1} = u_x$$

integrabel. —

(18.) Die Gleichung:

$$u_{x+2}\, u_{x+1}\, u_x = a\,(u_{x+2} + u_{x+1} + u_x)$$

geht durch die Substitution:

$$u_x = \sqrt{(a)}\,.\tan v_x$$

über in:

$$v_{x+2} + v_{x+1} + v_x = 0\,,$$

und als Integral von:

$$u_{x+2}\, u_{x+1}\, u_x = a\,(u_{x+2} + u_{x+1} + u_x)$$

ergibt sich:

$$u_x = \sqrt{(a)}\,.\tan\left\{{}^1C\,.\cos\frac{2\pi\,x}{3} + {}^2C\,.\sin\frac{2\pi\,x}{3}\right\}.$$

(19.) Dieselbe Substitution ist bei den Gleichungen:

$$u_{x+2}\, u_{x+1}\, u_x + a\,(u_{x+2} - u_{x+1} + u_x) = 0\,,$$

$$u_{x+2}\, u_{x+1}\, u_x - a\,(u_{x+2} - u_{x+1} - u_x) = 0\,,$$

$$u_{x+2}\, u_{x+1}\, u_x + a\,(u_{x+2} + u_{x+1} - u_x) = 0$$

mit Erfolg anwendbar. —

(20.) Man soll die Differenzengleichung:

$$u_{x+1}\, u_x - a\,(u_{x+1} - u_x) + 1 = 0$$

integriren. —

Auflösung. Wenn man dieselbe nach $x$ differenzirt, so erhält man:

$$(a + u_{x+1})\,\frac{du_x}{dx} - (a - u_x)\,\frac{du_{x+1}}{dx} = 0\,;$$

aber aus der gegebenen Gleichung folgt:

$$a = \frac{u_{x+1}\, u_x + 1}{u_{x+1} - u_x},$$

so daß sich durch Elimination von $a$ ergibt:

$$\frac{du_{x+1}}{1 + u^2_{x+1}} - \frac{du_x}{1 + u^2_x} = 0,$$

und wenn man integrirt:

$$\int \frac{du_{x+1}}{1+u^2_{x+1}} - \int \frac{du_x}{1 + u^2_x} = A,$$

wo $A$ eine noch zu bestimmende Function von $a$ ist. — Denn da die letzte sowohl, als die gegebene Gleichung das vollständige Integral derselben Differenzialgleichung ist; so kann die eine dieser beiden Gleichungen nichts weiter als eine Transformation der andern sein. — Die letzte Gleichung ist aber gleichbedeutend mit:

$$\Delta \int \frac{du_x}{1 + u^2_x} = A$$

weil:

$$\int \frac{du_{x+1}}{1 + u^2_{x+1}}$$

dieselbe Function von $u_{x+1}$ ist, als:

$$\int \frac{du_x}{1+u^2_x}$$

von $u_x$. — Die letzte Gleichung ist aber in Bezug auf das Zeichen $\Delta$ unmittelbar integrabel, und gibt:

$$\int \frac{du_x}{1 + u^2_x} = A\,x + C,$$

wo $C$ eine willkürliche Constante ist. —

**Um die Function $A$ von $a$ zu bestimmen, bemerke man zunächst, daß:**

$$\int \frac{du_x}{1 + u^2_x} = \text{arctang}\ (u_x) = \tan^{-1}(u_x),$$

also:

$$\tan^{-1} u_x = A\,x + C$$

$$u_x = \tan\,(A\,x + C)\,;$$

folglich:

$$u_{x+1} = \tan\,(A\,x + C + A)$$

$$= \frac{u_x + \tan A}{1 - u_x\,.\,\tan A}$$

ist. —

Aus der gegebenen Gleichung folgt aber:

$$u_{x+1} = \frac{u_x + \dfrac{1}{a}}{1 - u_x\,.\,\dfrac{1}{a}},$$

und aus der Vergleichung dieser beiden Werthe von $u_{x+1}$ ergibt sich:

$$\tan A = \frac{1}{a}\,,\ \text{also}\ A = \tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right).$$

Das vollständige Integral der vorgelegten Differenzengleichung ist also endlich:

$$u_x = \tan\left\{ x\,.\,\tan^{-1}\left(\frac{1}{a}\right) + C \right\}$$

(21.) Man soll die allgemeinere Differenzengleichung:

$$u_{x+1}\,u_x - a_x\,(u_{x+1} - u_x) + 1 = 0\,,$$

integriren. —

Auflösung. Aus derselben folgt zunächst:

$$\frac{1}{a_x} = \frac{u_{x-1} - u_x}{1 + u_x\,u_{x+1}} = \frac{\Delta u_x}{1 + u_x\,u_{x+1}}$$

aber nach Abschn. 1 Nr. 28 ist:

$$\Delta\ \tan^{-1} u_x = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta u_x}{1 + u_x\,u_{x-1}}\right);$$

also durch Substitution:

$$\triangle \tan^{-1} u_x = \tan^{-1} \frac{1}{a_x}$$

und wenn man integrirt:

$$\tan^{-1} u_x = C + \Sigma \tan^{-1} \frac{1}{a_x}$$

oder:

$$u_x = \tan \left\{ C + \Sigma \tan^{-1} \frac{1}{a_x} \right\}.$$

---

# Fünfter Abschnitt.

## Beispiele zur Integration gemischter Differenzengleichungen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Zunächst mögen die Bezeichnungen:

$$\frac{d}{dx} u_{x,y} = \frac{du_{x,y}}{dx}\,; \quad \frac{d}{dy} u_{x,y} = \frac{du_{x,y}}{dy}\,,$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{d}{dy}\right)^n u_{x,y} = \frac{d^{m+n} u_{x,y}}{dx^m \,.\, dy^n}\,,$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x} u_{x,y} = u_{x+1,y} - u_{x,y}\,, \quad \frac{\Delta}{\Delta y} u_{x,y} = u_{x,y+1} - u_{x,y}\,,$$

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^m \left(\frac{\Delta}{\Delta y}\right)^n u_{x,y} =$$

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta y}\right)^n u_{x+m,y} - \frac{m}{1}\left(\frac{\Delta}{\Delta y}\right)^n u_{x+m-1,y} + \text{\&c.}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta y} \cdot \frac{d}{dy} u_{x,y} = \frac{du_{x+1,y}}{dy} - \frac{du_{x,y}}{dy}\,; \text{ \&c.}$$

bemerkt werden, wo es offenbar gleichgültig ist, in welcher Ordnung die durch $\Delta$ und $d$ bezeichneten Operationen aufeinander folgen. —

(1.) Von der gemischten Gleichung:

$$u_{x+1,y} = \frac{d}{dy} u_{x,y}$$

ist das Integral:

$$u_{x,y} = \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi(y),$$

wo $\varphi(y)$ eine arbiträre Function von $y$ ist. — Der Grund hiervon ist leicht einzusehen; denn setzt man $u_{0,y} = \varphi(y)$, so ist:

$$u_{1,y} = \frac{d}{dy}\,\varphi(y)\,,\ \text{also: } u_{2,y} = \left(\frac{d}{dy}\right)^2 \varphi(y)\,,\ \text{\&c.}$$

(2.) Es soll die gemischte Gleichung:

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\,u_{x,y} = a\,.\,\frac{d}{dy}\,u_{x,y}\,,$$

integrirt werden. —

Auflösung. Man setze:

$$u_{x,y} = a^x\,.\,e^{-\frac{y}{a}}\,.\,v_{x,y}\,,$$

so ist:

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\,u_{x,y} = e^{-\frac{y}{a}}\left\{a^{x+1}\,x_{x+1,y} - a^x\,v_{x,y}\right\}$$

$$= a^x\,.\,e^{-\frac{y}{a}}\left\{a v_{x+1,y} - v_{x,y}\right\}$$

und:

$$a\,.\,\frac{d}{dy}\,u_{x,y} = a^x\,.\,e^{-\frac{y}{a}}\,.\left\{a\,\frac{d}{dy}\,v_{x,y} - v_{x,y}\right\}.$$

Substituirt man diese Werthe und reducirt, so wird die gegebene Gleichung:

$$v_{x+1,y} = \frac{d}{dy}\,v_{x,y}$$

Diese Gleichung ist nach Nr. 1 integrabel, und als Integral der gegebenen Gleichung ergibt sich sofort:

$$u_{x,y} = a^x\,.\,e^{-\frac{y}{a}}\,.\left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi(y)$$

wo $\varphi(y)$ eine arbiträre Function von $y$ ist. —

(3.) Es sei zu integriren:

$$u_{x+1,y} = a\,.\left(\frac{d}{dy}\right)^n u_{x,y}\,.$$

Setzt man:

$$u_{x,y} = a^x\,.\,v_{x,y}\,,$$

so ergibt sich als Integral:

$$u_{x,y} = a^x \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^{nx} \varphi(y)$$

(4.) Man soll die Gleichung:

$$u_{x+2,y} - a\left(\frac{d}{dy}\right) u_{x+1,y} + b\left(\frac{d}{dy}\right)^2 u_{x,y} = 0$$

integriren.

Auflösung. Setzt man:

$$u_{x,y} = p^x \cdot v_{x,y},$$

so ergibt sich durch Substitution und nachherige Division mit $p^x$:

$$p^2 v_{x+2,y} - ap \cdot \frac{d}{dy} v_{x+1,y} + b \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^2 v_{x,y} = 0.$$

In dieser Gleichung ist die Summe der Indices $x+2$, $x+1$, $x$ unten an $v$ und der Differenziationsindices 0, 1, 2 in den verschiedenen Gliedern constant. Setzt man also:

$$v_{x,y} = \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi(y)$$

so erhält man:

$$v_{x+2,y} = \frac{d}{dy} v_{x+1,y} = \left(\frac{d}{dy}\right)^2 v_{x,y} = \left(\frac{d}{dy}\right)^{x+2} \varphi(y),$$

und durch Substitution dieser Werthe ergibt die Gleichung:

$$p^2 - ap + b = 0,$$

deren Wurzeln $\alpha$, $\beta$ seien. — Da die gegebene Gleichung vom ersten Grade ist, und derselben sowohl durch:

$$\alpha^x \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi, (y)$$

als durch:

$$\beta^x \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_2(y)$$

genügt wird; so ist die Summe dieser letzten Ausdrücke der allgemeine Ausdruck für $u_{x,y}$; also:

$$u_{x,y} = \alpha^x \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_1(y) + \beta^x \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_2(y)$$

wo $\varphi_1(y)$ und $\varphi_2(y)$ zwei arbiträre Functionen von $y$ sind. —

(5.) Man soll die Gleichung:

$$u_{x+n,y} - a\,\frac{d}{dy}\,u_{x+n-1,y} + b\left(\frac{d}{dy}\right)^2 u_{x+n-2,y} - \ldots$$

$$\ldots \pm k \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^n u_{x,y} = 0$$

integriren. —

Aufl. Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung:

$$u^n - au^{n-1} + bu^{n-2} - \ldots \pm k = 0$$

bedeuten, so ist:

$$u_{x,y} = \alpha^x \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_1(y) + \beta^x \cdot \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_2(y) + \text{\&c.}$$

wo $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, ... $\varphi_n(y)$ wieder $n$ arbiträre Functionen von $y$ bedeuten. —

Es verdient ausdrücklich bemerkt zu werden: daß das Integrationsverfahren in den beiden letzten Beispielen ganz unabhängig ist von der durch $\frac{d}{dy}$ angezeigten Operation; also auch bei jeder andern Operation, z. B. bei $\frac{\Delta}{\Delta y}$ anwendbar ist, so daß sich durch dasselbe Verfahren die Gleichung:

$$u_{x+n,y} - a\,\frac{\Delta}{\Delta y}\,u_{x+n-1,y} + b\left(\frac{\Delta}{\Delta y}\right)^2 u_{x+n-2,y} \ldots$$

$$\ldots \pm k\left(\frac{\Delta}{\Delta y}\right)^n u_{x,y} = 0,$$

oder die noch allgemeinere:

$$u_{x+n,y} - a \nabla u_{x+n-1,y} + b \nabla^2 u_{x+n-2,y} - \ldots$$

$$\ldots \pm k \nabla^n u_{x,y} = 0$$

integriren läßt, wo $\nabla u_{x,y}$ irgend eine lineare Combination der Differenzen- oder Differenzialcoefficienten von $u_{x,y}$ in Bezug auf $y$ in beliebiger Aufeinanderfolge bedeutet. —

(6.) Man soll die Gleichung:

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta x}\right)^2 u_{x,y} - a\,\frac{\Delta}{\Delta x}\,\frac{d}{dy}\,u_{x,y} + b\left(\frac{d}{dy}\right)^2 u_{x,y} = 0$$

integriren. —

Auflösung. Setzt man:

$$u_{x,y} = \alpha^x \,.\, e^{-\frac{y}{a}} \,.\, v_{x,y}\,,$$

so ergibt sich durch Substitution und Division mit $\alpha^x \,.\, e^{-\frac{a}{y}}$ sofort:

$$0 = \left\{ \alpha^2\, v_{x+2,y} - a\,\alpha \,.\, \frac{d}{dy}\, v_{x+1,y} + b \,.\left(\frac{d}{dy}\right)^2 v_{x,y} \right\}$$

$$-\frac{2}{\alpha}\left\{\alpha^2\, v_{x+1,y} - a\alpha \,.\, \frac{1}{2}\left(v_{x+1,y} + \frac{d}{dy}\, v_{x,y}\right) + b \,.\, \frac{d}{dy}\, v_{x,y}\right\}$$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\left\{\alpha^2 - a\,\alpha + b\right\} v_{x,y}\,.$$

Setzt man nun:

$$v_{x,y} = \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi\,(y)\,,$$

so ist nach den vorhergehenden Beispielen einleuchtend, daß diese Gleichung wird:

$$0 = (\alpha^2 - a\,\alpha + b)\, v_{x+2,y} - \frac{2}{\alpha}\,(\alpha^2 - a\,\alpha + b)\, v_{x+1,y}$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2}\,(\alpha^2 - a\,\alpha + b)\, v_{x,y}\,.$$

Wenn also $\alpha$, $\beta$ die Wurzeln der Gleichung:

$$\alpha^2 - a\,\alpha + b = 0$$

bedeuten, so ist klar, daß jeder der Ausdrücke:

$$\alpha^x . e^{-\frac{\alpha}{y}} . \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_1 (y) \text{ und } \beta^x . e^{-\frac{\beta}{y}} . \left(\frac{d}{dy}\right) \varphi_2 (y),$$

der gegebenen Gleichung genügt, und daß mithin:

$$u_{x,y} = \alpha^x . e^{-\frac{\alpha}{y}} \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_1 (y) + \beta^x . e^{-\frac{\beta}{y}} \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_2 (y)$$

ist.

(7.) Durch ein ähnliches Verfahren findet man für:

$$\left(\frac{\triangle}{\triangle x}\right)^n u_{x,y} - a . \left(\frac{\triangle}{\triangle x}\right)^{n-1} \frac{d}{dy} u_{x,y} +$$

$$+ b . \left(\frac{\triangle}{\triangle x}\right)^{n-2} \left(\frac{d}{dy}\right)^2 u_{x,y} -$$

$$\ldots \pm k . \left(\frac{d}{dy}\right)^n u_{x,y} = 0$$

das Resultat:

$$u_{x,y} = \alpha^x . e^{-\frac{y}{\alpha}} . \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_1 (y) + \beta^x . e^{-\frac{y}{\beta}} . \left(\frac{d}{dy}\right)^x \varphi_2 (y) + \&c.$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung:

$$u^n - au^{n-1} + \ldots \pm k = 0$$

und $\varphi_1 (y), \varphi_2 (y), \ldots \varphi_n (y)$ arbiträre Functionen von $y$ bedeuten.

(8.) Aus:

$$u_{x,y,z} = a \left(\frac{d}{dy}\right)^\alpha u_{x+1,y,z} + b \left(\frac{d}{dz}\right)^\beta u_{x-2,x,z},$$

ergibt sich:

$$u_{x,y,z} = a^x \left(\frac{d}{dy}\right)^{\alpha x} \varphi (y) + b^{\frac{x}{2}} . \left(\frac{d}{dz}\right)^{\frac{\beta x}{2}} \psi (z)$$

wo $\varphi (y)$ und $\psi (z)$ zwei arbiträre Functionen sind. —

# Sechster Abschnitt.

## Beispiele für die Summirung von Reihen durch Integration ihres allgemeinen Gliedes.

Man soll die Summen der folgenden Reihen finden, indem $S_x$ die Summe von $x$ Gliedern und $S$ die von unendlich vielen Gliedern der Reihe bedeutet. —

(1.) Von:

$$1.2.4 + 2.3.5 + 3.4.6 + \&c.$$

ist die Summe:

$$S_x = \frac{x(x+1)(x+2)(3x+13)}{12}.$$

(2.) Von:

$$1^4 + 3^4 + 5^4 + \ldots (2x-1)^4$$

ist die Summe:

$$S_x = \frac{x(4x^2-1)(12x^2-7)}{15}$$

(3.) Von:

$$1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \&c.$$

ist sie:

$$S_x = \frac{1 - p^x(1 + x - xp)}{(1-p)^2}$$

$$S = \frac{1}{(1-p)^2},\ p < 1.$$

(4.) Von:

$$\frac{10}{1.2.3.4} + \frac{14}{2.3.4.5} + \frac{18}{3.4.5.6} + \&c.$$

ist sie:

$$S_x = \frac{2}{3} - \frac{2}{(x+1)(x+3)}\,; \quad S = \frac{2}{3}.$$

(5.) Von:

$$\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$+ \frac{1}{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} + \&c.$$

ist sie:

$$S_x = \frac{x}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}\,; \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(6.) Für die Reihe:

$$1 . 3^2 + 3 . 5^2 + 5 . 7^2 + \&c.$$

hat man:

$$S_x = \frac{x(6x^3 + 16x^2 + 9x - 4)}{3}.$$

(7.) Für die Reihe:

$$2 . 5 . 8 + 4 . 8 . 14 + 8 . 14 . 26 + 16 . 26 . 50 + \&c.$$

ist:

$$S_x = \frac{36 . 2^{3x} + 84 . 2^{2x} + 56 . 2^x - 176}{7}.$$

(8.) Für die Reihe:

$$\frac{3}{5 . 7} - \frac{9}{7 . 29} + \frac{27}{29 . 79} - \frac{81}{79 . 245} + \&c.$$

ist:

$$S_x = \frac{1}{20} - \frac{1}{4\{2+(-3)^x\}}\,; \quad S = \frac{1}{20}.$$

(9.) Für die Reihe:

$$\frac{1}{2 . 5 . 8 . 11} + \frac{3 . 19}{5 . 8 . 11 . 14} + \frac{5 . 19^2}{8 . 11 . 14 . 17} + \&c.$$

findet man:

$$S_x = \frac{19^x}{27\,(3x+2)\,(3x+5)\,(3x+8)} - \frac{1}{2160}.$$

(10.) Für die Reihe:

$$\frac{2}{1.3.5}\quad\frac{5.11}{3.5.7} + \frac{8.11^2}{5.7.9} - \&c.$$

ist:

$$S_x = \frac{1}{24} - \frac{(-11)^x}{8\,(2x+1)\,(2x+3)}.$$

(11.) Wenn $u_1, u_2, u_3 \ldots$ eine arithmetische Progression bilden, die Summe der Reihe:

$$\frac{p}{u_0\,u_1\,u_2\ldots u_{m-1}} + \frac{(p+q).s}{u_1\,u_2\ldots u_m} + \frac{(p+2q)s^2}{u_2\,u_3\ldots u_{m+1}} + \&c.$$

zu finden, und die Bedingung anzugeben, unter welcher solches thunlich ist. —

Auflösung. Das $(x+1)$te Glied dieser Reihe ist:

$$\frac{(p+q\,x)\,s^x}{u_x\,u_{n+1}\ldots u_{x+m-1}},$$

und für die Differenz einer Function, wie:

$$\frac{A\,.\,s^x}{u_x\ldots u_{x+m-2}}$$

findet man leicht:

$$\frac{A\,(su_x - u_{x+m-1})s^x}{u_x\ldots u_{x+m-1}}.$$

Setzt man $u_x = a + h_x$, so wird der Zähler:

$$(A\,\{(s-1)\,a - (m-1)\,h\} - A\,(s-1)\,hx)\,s^x,$$

und dies mit:

$$(p+qx)\,s^x$$

verglichen, gibt:

$$A = \frac{q}{(x-1)h}.$$

Die gesuchte Summe ist mithin:

$$S_x = \frac{q}{(s-1)h}\left\{\frac{s^x}{u_x \ldots u_{x+m-2}} - \frac{1}{u_0 \ldots u_{m-2}}\right\},$$

die Bedingungsgleichung:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{h} - \frac{m-1}{s-1},$$

und endlich:

$$S = \frac{q}{(1-s)h \,.\, u_0 \ldots u_{m-2}}, \quad s < 1.$$

Die Beispiele (9) und (10) sind specielle Fälle hiervon. —

(12.) Die Summe der Reihe:

$$\frac{1^2 \,.\, 4}{2 \,.\, 3} + \frac{2^2 \,.\, 4^2}{3 \,.\, 4} + \frac{3^2 \,.\, 4^3}{4 \,.\, 5} + \&c.$$

ist:

$$S_x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{x-1}{x+2} \,.\, 4^x.$$

(13.) Die Summe der Reihe:

$$\frac{1^2 \,.\, 9}{3 \,.\, 5} + \frac{2^2 \,.\, 9^2}{5 \,.\, 7} + \frac{3^2 \,.\, 9^3}{7 \,.\, 9} + \&c.$$

ist:

$$S_x = \frac{3}{32}\left\{1 + \frac{2x-1}{2x+3} \,.\, 3^{2x+1}\right\}.$$

(14.) Man soll bestimmen, in welchen Fällen die Function:

$$\frac{(p + qx + rx^2)\, s^x}{u_x \ldots u_{x+m-1}}$$

integrabel ist, und in diesen Fällen die Integration ausführen. —

Auflösung. Man setze als Integral:

$$\frac{(A + Bx)\, s^x}{u_x \ldots u_{x+m-2}} \qquad (a.)$$

so ergibt sich durch Vergleichung der Differenz desselben mit der gegebenen Function:

$$A = \frac{q}{(s-1)h} - \left(\frac{a}{h} + \frac{s-m+1}{s-1}\right) \cdot \frac{r}{(s-1)h}$$

$$B = \frac{r}{(s-1)h},$$

und für die Bedingungsgleichung:

$$p - q \cdot \left(\frac{a}{h}\right) + r\left(\frac{a}{h}\right)^2 =$$

$$= \frac{m-1}{s-1}\left\{-q + 2r\left(\frac{a}{h}\right) + \frac{s-m+1}{s-1}\,r\right\} \qquad (b)$$

Wenn dieselbe erfüllt wird, so ist die gegebene Function unmittelbar integrabel, und das Integral hat die Form (*a*), indem die Constanten die obigen Werthe haben. — Wenn man die Bedingungsgleichung (*b*) in Beziehung auf *s* auflöst, so erhält man zwei reelle, oder imaginäre Werthe von *s*, welche die vorgelegte Function integrabel machen, und wenn man dies verallgemeinert; so ergibt sich durch dasselbe Verfahren das folgende allgemeine Theorem, welches sich leicht beweisen läßt.

(15.) **Theorem.** Es ist immer möglich, für *s* solche *n* reelle, oder imaginäre Werthe als Wurzeln einer Gleichung des $n^{\text{ten}}$ Grades anzugeben, für welche die Function:

$$\frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots v x^n) \,.\, s^x}{u_x\, u_{x+1} \ldots\ldots u_{x+m-1}}$$

unmittelbar integrabel wird, indem $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ irgend welche gegebene Größen sind, und $u_x = a + hx$ ist.

(16.) Man soll die Function:

$$\frac{x^2\left(1 + \frac{h}{a}\right)^{2x}}{(hx+a)\,(hx+a+h)}$$

integriren, oder die Reihe:

$$\frac{1^2}{(a+h)\,(a+2h)} \cdot \left(\frac{a+h}{a}\right)^2 +$$

$$+ \frac{2^2}{(a+2h)\,(a+3h)} \cdot \left(\frac{a+h}{a}\right)^4 + \text{\&c.}$$

summiren. —

Auflösung. Diese Function genügt der Bedingungsgleichung (*b*) in Nr. 14, und als Integral oder Summe von $x-1$ Gliedern der Reihe findet man:

$$C+\frac{a^2}{h^3(2a+h)}\,\frac{h(x-1)-a}{hx+a}\left(\frac{a+h}{a}\right)^{2x},$$

oder wenn man die Constante bestimmt und $x+1$ für $x$ setzt:

$$S_x=\frac{a(a+h)}{h^3(2a+h)}\left\{1+\frac{hx-a}{h(x+1)+a}\left(\frac{a+h}{a}\right)^{2x+1}\right\}.$$

Die Reihen in Nr. 13 und 14 sind specielle Fälle hiervon, und da Reihen dieser Art nicht ohne Interesse sind, besonders wenn sie aus einem allgemeineren Gesichtspunkte betrachtet werden; so mögen noch einige Fälle davon mitgetheilt werden. —

(17.) $$\frac{2}{1.3}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{3.5}\times\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5.7}\times\frac{1}{3^3}+\&c.$$

$$S_x=\frac{1}{4}\left\{1-\frac{1}{(2x+1).3^x}\right\};\quad S=\frac{1}{4}.$$

(18.) $$\frac{3}{1.2}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\times\frac{1}{2^2}+\&c.$$

$$S_x=1-\frac{1}{(x+1).2^x},\quad S=1.$$

(19.) $$\frac{5}{1.2.3}\times\frac{1}{2}+\frac{6}{2.3.4}\times\frac{1}{2^2}+\frac{7}{3.4.5}\times\frac{1}{2^3}+\&c.$$

$$S_x=\frac{1}{2}-\frac{1}{(x+1)(x+2).2^x};\quad S=\frac{1}{2}.$$

(20.) $$1+2+3+\ldots x=\frac{x(x+1)}{2}.$$

(21.) $$1^2+2^2+3^2+\ldots x^2=\frac{x(x+1)(x+2)}{3}-\frac{x(x+1)}{2}.$$

(22.) $1^3+2^3+3^3+\ldots x^3$

$$=\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{4}-\frac{x(x+1)(x+2)}{1}+\frac{x(x+1)}{2}$$

$$=\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2.$$

(23.) $1^n+2^n+3^n+\ldots x^n=S_x,$

$$S_x=(-1)^{n+1}\left\{\Delta o^n.\frac{x(x+1)}{1.2}-\Delta^2 o^n.\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\pm\Delta^n o^n.\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{1.2\ldots(n+1)}.\right\}$$

Vergleiche Abschn. 2. Nr. 26, wo $n=1$, $u_x=\alpha+1$ ist. — Dieselben Summen lassen sich auch folgendermaßen ausdrücken:

(24.) $1+2+\ldots x=\frac{x(x+1)}{1.2}.$

(25.) $$1^2+2^2+\ldots x^2=\frac{1}{8}\left\{\frac{2x+1}{1}+\frac{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}{3}\right\}.$$

(26.) $$1^3+2^3+\ldots x^3=\frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{4}+\frac{x(x+1)}{2}.$$

(27.) $$1^4+2^4+\ldots x^4=\frac{1}{32}\left\{\frac{2x+1}{1}+10.\frac{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}{3}+\frac{(2x-3)(2x-1)(2x+1)(2x+3)(2x+5)}{5}\right\}$$

(28.) $$1^5+\ldots x^5=\frac{(x-2)(x-1)\ldots(x+3)}{6}+5.\frac{(x-1)\ldots(x+2)}{4}+\frac{x(x+1)}{2}.$$

und allgemein:

$$(29.)\quad 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + \ldots . x^{2n+1} =$$

$$= A_0 . \frac{x(x+1)}{2} + A_1 . \frac{(x-1) \ldots (x+2)}{4} +$$

$$+ A_2 . \frac{(x-2) \ldots (x+3)}{6} + \&c.$$

wo die Coefficienten die Werthe in Abschn. 2, Nr. 4 haben, und:

$$1^{2n} + 2^{2n} + \ldots x^{2n} = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 . \frac{2x+1}{1} + A_1 . \frac{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}{3} + \&c. \\ - A_0 + 1^2 . A_1 - 1^2 . 3^2 . A_2 + \&c. \end{array} \right\}$$

indem die Coefficienten die in Abschn. 2, Nr. 6 sind. —

$$(30.)\quad 1 + 3 + 5 + \ldots (2x - 1) = x^2 .$$

$$(31.)\quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (2x-1)^2 =$$

$$= \frac{(2x-1) . 2x . (2x+1)}{6} .$$

$$(32.)\quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots (2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 .$$

$$(33.)\quad 1^n + 3^n + 5^n + \ldots (2x-1)^n$$

$$= (-1)^n . \left\{ \begin{array}{l} \frac{\triangle o^{n+1}}{1} . 2^{n-1} . \frac{(2x+1)-1}{1} - \frac{\triangle^2 o^{n+1}}{1.2} . 2^{n-2} . \\ . \frac{(2x+1)(2x+3) - 1 . 3}{2} + \&c. \end{array} \right\}$$

$$(34.)\quad (a+h)^n + (a+2h)^n + (a+3h)^n + \ldots (a+xh)^n =$$

$$= u_1{}^n + u^n{}_2 + \ldots . u^n{}_x$$

wo $u^x = a + hx$ ist, und:

$$S_x = (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\Delta o^n}{1} \, . \, h^{n-2} \, . \, \frac{u_x \, u_{x+1} - u_0 \, u_1}{2} - \frac{\Delta^2 o}{1 \, . \, 2} \, h^{n-3} \, . \right.$$

$$\left. . \, \frac{u_x \, u_{x+1} \, u_{x+2} - u_0 \, u_1 \, u_2}{3} + \&c. \right\}$$

(35.) $\cos\theta + \cos 3\,\theta + \cos 5\,\theta + \ldots \cos (2x - 1)\,\theta =$

$$= \frac{\sin x\,\theta}{\sin\theta} \, . \, \cos x\,\theta .$$

(36.) $\sin\theta + \sin 3\,\theta + \sin 5\,\theta + \ldots \sin (2x - 1)\,\theta$

$$= \frac{\sin x\,\theta}{\sin\theta} \, . \, \sin x\,\theta .$$

(37.) $\cos\theta + \cos(\theta + h) + \cos(\theta + 2h) + \ldots$

$$\cos \{\theta + (x - 1) \, . \, h\} = \cos \left\{\theta + \frac{x-1}{2} h\right\} . \frac{\sin\left(\frac{x}{2} h\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} h\right)} .$$

(38.) $\sin\theta + \sin(\theta + h) + \sin(\theta + 2\,h) + \ldots$

$$\sin\{\theta + (x - 1) \, . \, h\} = \sin\left\{\theta + \frac{x-1}{2} \, h\right\} . \frac{\sin\left(\frac{x}{2} h\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} h\right)} .$$

(39.) $1 \, . \, (\cos\theta)^2 + 2\,(\cos 2\,\theta)^2 + 3\,(\cos 3\,\theta)^2 + \ldots$

$$\ldots + x\,(\cos x\theta)^2 = \frac{x\,(x+1)}{4} +$$

$$\frac{x}{4 \, . \, \sin\theta} \, . \, \sin (2x + 1)\,\theta - \frac{1}{4}\left(\frac{\sin x\,\theta}{\sin\theta}\right)^2 .$$

(40.) $\sin\theta \, . \, \cos\psi + \sin 2\,\theta \, . \, \cos 3\,\psi + \ldots$

$$\ldots + \sin x\,\varphi \, . \, \cos (2x - 1)\,\psi$$

$$= \sin\left\{\frac{\theta}{2} + x\left(\frac{\theta}{2} + \psi\right)\right\} . \frac{\sin x\left(\frac{\theta}{2} + \psi\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2} + \psi\right)}$$

$$+\sin\left\{\frac{\theta}{2}+x\left(\frac{\theta}{2}-\psi\right)\right\}.\frac{\sin x\left(\frac{\theta}{2}-\psi\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}-\psi\right)}.$$

(41.) $$\frac{1}{\cos\theta.\cos 2\theta}+\frac{1}{\cos 2\theta.\cos 3\theta}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{\cos 3\theta.\cos 4\theta}+\&c.$$

$$S_x=\frac{\tan(x+1)\theta-\tan\theta}{\sin\theta};$$

(42.) $$\frac{1}{\sin\theta.\cos 2\theta}-\frac{1}{\cos 2\theta.\sin 3\theta}+$$

$$+\frac{1}{\sin 3\theta.\cos 4\theta}-\&c.$$

$$S_x=\frac{1}{\cos\theta.\sin 2(x+1)\theta}\left\{(-1)^{x+1}-\cos 2(x+1)\theta\right\}-\frac{1}{\sin\theta}.$$

(43.) $$\frac{1}{\sin\theta.\sin 2\theta}+\frac{1}{\sin 2\theta.\sin 3\theta}$$

$$+\frac{1}{\sin 3\theta.\sin 4\theta}+\&c.$$

$$S_x=\frac{-\operatorname{cotan}(x+1)\theta+\operatorname{cotang}\theta}{\sin\theta}.$$

(44.) $$\frac{1}{\cos\theta.\sin 2\theta}-\frac{1}{\sin 2\theta.\cos 3\theta}+$$

$$+\frac{1}{\cos 3\theta.\sin 4\theta}-\&c.$$

$$S_x=\frac{(-1)^{x+1}+\cos 2(x+1)\theta}{\cos\theta.\sin 2(x+1)\theta}+\frac{\tan\theta}{\cos\theta}.$$

(45.) $$\frac{1}{\sin\theta.\sin 3\theta}-\frac{1}{\sin 2\theta.\sin 4\theta}$$

$$+\frac{1}{\sin 3\theta.\sin 5\theta}-\&c.$$

$$S_x = \frac{1}{2 . \cos\theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta . \sin 2\theta} + \frac{(-1)^{x+1}}{\sin(x+1)\theta . \sin(x+2)\theta}\right\}.$$

(46.) $$\frac{1}{\cos\theta . \cos 3\theta} - \frac{1}{\cos 2\theta . \cos 4\theta} + \frac{1}{\cos 3\theta . \cos 5\theta} - \&c.$$

$$S_x = \frac{1}{2 . \cos\theta}\left\{\frac{1}{\cos\theta . \cos 2\theta} + \frac{(-1)^{x+1}}{\cos(x+1)\theta . \cos(x+2)\theta}\right\}.$$

(47.) $$\tan\theta + \tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{4}\tan\frac{\theta}{4} + \&c.$$

$$S_x = \frac{1}{2^{x-1}}\cot\frac{\theta}{2^{x-1}} - 2 . \cos 2\theta,$$

$$S = \frac{1}{\theta} - 2 . \cot 2\theta.$$

(48.) $$(\tan\theta)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\tan\frac{\theta}{4}\right)^2 + \&c.$$

$$S_x = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2x}}\right) + \frac{4}{(\tan 2\theta)^2} - \frac{1}{\left(2^{x-1} . \tan\frac{\theta}{2^{x-1}}\right)^2}.$$

$$S = \frac{8}{3} + \frac{4}{(\tan 2\theta)^2} - \frac{1}{\theta^2}.$$

(49.) $$\tan\theta . (\sec\theta)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\sec\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\tan\frac{\theta}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\sec\frac{\theta}{4}\right)^2 + \&c.$$

$$S_x = \frac{\cos\frac{\theta}{2^{x-1}}}{\left(2^{x-1} . \sin\frac{\theta}{2^{x-1}}\right)^3} - 8 . \frac{\cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^3}.$$

$$S = \frac{1}{\theta^3} - 8 . \frac{\cos 2\theta}{(\cos 2\theta)^3}.$$

(50.) $\frac{a-1}{a+1}+2\,.\,\frac{a^2-1}{a^2+1}+4\,.\,\frac{a^4-1}{a^4+1}+\&c.$

$$S_x=2^x\,.\,\frac{a^{2^x}+1}{a^{2^x}-1}-\frac{a+1}{a-1}.$$

(51.) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2}{a^4-1}+\frac{a^4}{a^8-1}+\&c.$

$$S_x=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^{2^x}+1}{a^{2^x}-1}\right\}.$$

(52.) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin 2\theta}+\frac{1}{\sin 4\theta}+\frac{1}{\sin 8\theta}+\&c.$

$$S_x=\cot\frac{\theta}{2}-\cot 2^{x-1}\theta\,.$$

(53.) $\frac{1}{\left(2\,.\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(4\,.\cos\frac{\theta}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(8\,.\cos\frac{\theta}{8}\right)^2}+\&c.$

$$S_x=\frac{1}{(\sin\theta)^2}-\frac{1}{\left(2^x\,.\sin\frac{\theta}{2^x}\right)^2}$$

$$S=\frac{1}{(\sin\theta)^2}-\frac{1}{\theta^2}\ .$$

(54.) $\sin\theta\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^2+$

$$+\ 4\sin\frac{\theta}{4}\left(\sin\frac{\theta}{8}\right)^2+\&c.$$

$$S_x=\frac{1}{4}\left(2^x\,.\sin\frac{\theta}{2^{x-1}}-\sin 2\,\theta\right)$$

$$S=\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\,.$$

(55.) $(\sin\theta)^4 + 4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4 + 4^4 . \left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^4 + \&c.$

$$S_x = \left(1^{x-1} \sin \frac{\theta}{2^{x-1}}\right)^2 - \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2,$$

$$S = \theta^2 - \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2.$$

(56.) $\tan\theta\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\tan\frac{\theta}{2}\left(\tan\frac{\theta}{4}\right)^2 +$

$$+ 4\tan\frac{\theta}{4}\left(\tan\frac{\theta}{8}\right)^2 + \&c.$$

$$S_x = \tan\theta - 2^x . \tan\frac{\theta}{2^x},$$

$$S = \tan\theta - \theta.$$

(57.) $\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{2}{\cos 2\theta}\right)^2 + \left(\frac{4}{\cos 4\theta}\right)^2 +$

$$+ \left(\frac{8}{\cos 8\theta}\right)^2 + \&c.$$

$$S_x = \left(\frac{2^x}{\sin 2^x\theta}\right)^2 - \frac{1}{\sin\theta^2}.$$

(58.) Man soll den Werth des Productes:

$$P_x = \tan\theta\,(\tan 2\theta)^{\frac{1}{2}}\,(\tan 4\theta)^{\frac{1}{4}} \ldots (\tan 2^x\theta)^{\frac{1}{2^x}}$$

finden. —

Auflösung. Wenn man mittelst Abschn. 1, Nr. 19 die aus $x + 1$ Gliedern bestehende Reihe:

$$\log\tan\theta + \tfrac{1}{2}\log\tan 2\theta + \tfrac{1}{4}\log\tan 4\theta + \&c.$$

summirt, und mittelst der bekannten Eigenschaft:

$$a . \log A + b . \log B + \&c. = \log(A^a . B^b . \&c.)$$

von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht; so ergibt sich:

$$P_x = \frac{4 \,.\, \sin \theta^2}{(2 \sin 1^{x+1} \theta^{\frac{1}{2x}}}\,,$$

und für unendlich viele Factoren:

$$P = 4 \,.\, \sin \theta^2 \,.$$

(59.) Die Summe der Reihe:

$$\tan^{-1} \frac{1}{1+1+1^2} + \tan^{-1} \frac{1}{1+2+2^2}$$

$$+ \tan^{-1} \frac{1}{1+3+3^2} + \&c.$$

oder in gewöhnlichen Zeichen:

$$\text{arc}\left(\tan = \frac{1}{1+1+1^2}\right) + \text{arc}\left(\tan = \frac{1}{1+2+2^2}\right) + \&c.$$

ist:

$$S_x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right); \quad S = \frac{\pi}{4}.$$

(60.) Die Summe der Reihe:

$$\tan^{-1} \frac{1}{2 \,.\, 1^2} + \tan^{-1} \frac{1}{2 \,.\, 2^2} + \tan^{-1} \frac{1}{2 \,.\, 3^2} + \&c.$$

ist:

$$S_x = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \frac{1}{2x+1}\,; \quad S = \frac{\pi}{4}\,;$$

und ergibt sich nach Abschn. 1, Nr. 26, wenn man $h + x\theta = 2x + 1$ setzt. —

(61.) Die Reihe:

$$\tan^{-1} \frac{1}{7} + 2 \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{38} + 2^2 \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{286} + \&c.$$

worin die Nenner nach der Progression:

$$4 + 3,\ 4 \,.\, 8 + 3 \,.\, 2,\ 4 \,.\, 8^2 + 3 \,.\, 2^2,\ \&c.$$

$$S_x = 2^x . \tan^{-1}\frac{1}{2^x} - \frac{\pi}{4}; \quad S = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(62.) Die Summe der Reihe:

$$\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{13} + \tan^{-1}\frac{1}{27} + \dots$$

$$\dots + \tan^{-1}\frac{2}{3x + 5x^2}$$

ist:

$$S_x = \tan^{-1}\frac{1}{2} - \tan^{-1}\frac{2}{5x+4}, \quad S = \tan^{-1}\frac{1}{2}.$$

(63.) Man soll bestimmen, in welchen Fällen die Function:

$$\tan^{-1}\frac{1}{p + qx + rx^2}$$

unmittelbar integrabel ist, und in diesen Fällen die Summe der Reihe:

$$\tan^{-1}\frac{1}{p+q+r} + \tan^{-1}\frac{1}{p+q.2+r.2^2} +$$

$$+ \tan^{-1}\frac{1}{p+q.3+r.3^2} + \text{\&c.}$$

finden. —

Auflösung. Wenn man die gegebene Function mit dem zweiten Theile der Gleichung in Abschn. 1, Nr. 27 vergleicht, so ergibt sich:

$$a = \frac{1}{\sqrt{(r)}}, \quad b = O, \quad A = -\frac{q-r}{2\sqrt{(r)}}, \quad B = -\sqrt{(r)},$$

nebst der Bedingungsgleichung:

$$q^2 - r^2 = 4\,(pr - 1)\,; \quad \dots \quad (a)$$

und wenn diese erfüllt wird; so ist die gesuchte Summe:

$$\Sigma \tan^{-1}\frac{1}{p + qx + rx^2} = C - \tan^{-1}\left\{\frac{2}{q - r + 2rx}\right\}.$$

Die Reihen (59), (60), (62) sind specielle Fälle hiervon, und man findet leicht, daß ihre allgemeinen Glieder der Gleichung ($a$) genügen. —

(64.) Wenn das allgemeine oder $x^{te}$ Glied einer Reihe ist:

$$u_x = \tan^{-1} \frac{1}{10x^2 - 24x + 12},$$

so ist:

$$S_x = \tan^{-1}(7) + \tan^{-1}(10x - 7);\; S = \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(7).$$

(65.) Wenn:

$$u_x = \tan^{-1} \frac{1}{34x^2 - 8x - 8},$$

ist, so ist:

$$S_x = \tan^{-1}(34x + 13) - \tan^{-1}(13);\quad S = \tan^{-1} \frac{1}{13}.$$

(66.) Wenn:

$$u_x = \tan^{-1} \frac{1}{74x^2 - 12x - 18},$$

ist, so ist:

$$S_x = \tan^{-1}(74x + 31) - \tan^{-1}(31);\quad S = \tan^{-1} \frac{1}{31}.$$

(67.) Wenn:

$$u_x = \tan^{-1} \frac{1}{26x^2 - 16x - 4},$$

ist, so ist:

$$S_x = \tan^{-1}(26x + 5) - \tan^{-1}(5);\quad S = \tan^{-1} \frac{1}{5}.$$

Die Reihen (47), (48), (49), (50) und (53) rühren von Wallace her, und sind selbst in den ungünstigsten Fällen wegen ihrer raschen Convergenz zur näherungsweisen Berechnung von Kreisbogen sehr geeignet. — Denn aus (47) folgt:

$$\frac{1}{\theta} = (2 \,.\, \cot 2\,\theta + \tan\theta) + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\,\theta + \text{\&c.}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta} + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\,\theta + \text{\&c.}$$

wegen:

$$2\cot 2\,\theta + \tan\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

Wenn man $-x$ für $x$ in (50) setzt, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{a^{\frac{1}{4}}-1}{a^{\frac{1}{4}}-1} + \ldots\ldots \frac{1}{2^x}\cdot\frac{a^{2^{-x}}-1}{a^{2^{-x}}+1}$$

$$= \frac{a+1}{a-1} - \frac{a^{2^{-x}}+1}{2^x\,(a^{2^{-x}}-1)},$$

und diese Summe reducirt sich für $x = \infty$ auf:

$$\frac{a+1}{a-1} - \frac{2}{\log a}.$$

Dieser Ausdruck ist von Wallace zur Berechnung des Logorithmen einer einzelnen Zahl, z. B. einer sehr hohen Primzahl, vorgeschlagen, welche Rechnung wegen der vielen Wurzelausziehungen und Divisionen durch Decimalbrüche allerdings beschwerlich ist; allein diese Formel verdient wegen ihrer analytischen Eleganz, beachtet zu werden, namentlich wenn man die Schwierigkeiten erwägt welche in diesem Theile der Analysis auftreten, sowie die geringe Aussicht auf weitere Fortschritte. — Aus diesem Grunde sind auch die Reihenanalogen (52), (54), (55), (56) und (57) hinzugefügt, von denen sich aus (54, 55, 56) ebenfalls Formeln zur genäherten Berechnung von Kreisbogen herleiten lassen, nämlich:

$$\theta = \frac{1}{2}\sin 2\,\theta +$$

$$+ 2\left\{\sin\theta \,.\, \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^2 + \text{\&c.}\right\}$$

$$\theta^2 = \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 +$$

$$+\left\{(\sin\theta)^4 + 4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4 + 4^2\left(\sin\frac{\theta}{4}\right)^4 + \&c.\right\} \qquad (a).$$

und:

$$\theta = \tan\theta - \left\{\tan\theta\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2\tan\frac{\theta}{2}\left(\tan\frac{\theta}{4}\right)^2 + \&c.\right\},$$

welche schon nach wenigen Gliedern alle mit demselben Grade, nämlich nahezu wie die Potenzen von $\frac{1}{4}$, convergiren; aber zur wirklichen Berechnung ist die Gleichung ($a$) mehr geeignet, als die andern. —

Das Beispiel (58) rührt von Babbage her, woraus sich die Summe der Reihe (52) herleiten läßt, wenn man das logarithmische Differenzial nach $\theta$ nimmt — und umgekehrt. — Die hier angewandte Methode hat jedoch den Vortheil, daß sie das Prinzip angibt, wovon alle Transformationen derselben Art zuletzt abhängen.

Die Reihen (59) und (60) sind von Euler in den Comm. Acad. Petropol. IX, 1737, p. 234 und von Spence in seinen Logarithmic Transcendents augegeben. — Euler führt sie als specielle Fälle einer sehr allgemeinen Formel an, zu welcher er durch eine Art von Probiermethode gelangt, welche sich aber ganz einfach auf folgende Weise ergibt:

Nach Abschn. 1, Beispiel 28 ist:

$$\Delta \tan^{-1} u_x = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta u_x}{1 + u_x\, u_{x+1}}\right),$$

folglich:

$$\Sigma \tan^{-1}\frac{\Delta u_x}{1 + u_x\, u_{x+1}} = C + \tan^{-1} u_x,$$

und für die Summe der Reihe:

$$\tan^{-1}\left\{\frac{u_1 - u_0}{1 + u_0\, u_1}\right\} + \tan^{-1}\left\{\frac{u_2 - u_1}{1 + u_1\, u_2}\right\} + \ldots\ldots$$

$$\ldots.\tan^{-1}\left\{\frac{u_x - u_{x-1}}{1 + u_{x-1}\, u_x}\right\},$$

ergibt sich also der Ausdruck:

$$\tan^{-1} u_x - \tan^{-1} u_0\,,$$

welches in der That der Euler'sche ist. Denn da $u_x$ eine Function von $x$ von einer ganz arbiträren Form ist, so kann man beliebig viele particuläre Werthe $u_0, u_1, u_2, \ldots u_x$ derselben als eben so viele willkürliche und unabhängige Constanten ansehen und durch verschiedene Buchstaben $a, b, c, \ldots$ bezeichnen, und eine höchst leichte Reduction gibt alsdann die verlangte Formel. — Die Gleichung (61) ist nicht in der allgemeinen Euler'schen Formel enthalten, läßt sich aber leicht durch eine ähnliche Methode, wie die, durch welche diese Formel ursprünglich erhalten wurde, aus der folgenden Gleichung:

$$\tan^{-1}\frac{1}{n} + \tan^{-1}\frac{1}{4n^3+3n} = 2\tan^{-1}\frac{1}{2n}\,; \qquad (a)$$

herleiten, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt. —

(68.) Man soll die Summe der Reihe:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{4n^3+3\,.\,n}\right) + 2\,.\tan^{-1}\left(\frac{1}{32n^3+6n}\right) +$$

$$+\,4\,.\tan^{-1}\left(\frac{1}{256n^3+12n}\right) \text{ \&c.}$$

finden. —

Auflösung. Das $(x+1)^{\text{te}}$ Glied derselben ist:

$$2^x\,.\tan^{-1}\left\{\frac{1}{4\,(2^x\,n)^3+3\,.\,2^x\,n}\right\} = u_{x+1}\,.$$

Setzt man $2^x n$ für $n$ in $(a)$ und multiplicirt mit $2^x$, so erhält man:

$$2^x\,.\tan^{-1}\left\{\frac{1}{4\,(2^x\,n)^3+3\,.\,2^x\,n}\right\} =$$

$$= 2^{x+1}\tan^{-1}\frac{1}{2^{x+1}n} - 2^x\tan^{-1}\frac{1}{2^x\,n}\,.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung ist offenbar die vollständige Differenz von:

$$2^x \tan^{-1} \frac{1}{2^x n},$$

so daß sich durch Integration beider Theile ergibt:

$$\Sigma u_{x+1} = C + 2^x \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{2^x n}$$

und wenn die Constante auf die gewöhnliche Weise bestimmt wird; so erhält man endlich:

$$S_x = 2 \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{2^x n} - \tan^{-1} \frac{1}{n}, \quad S = \frac{1}{n} - \tan^{-1} \frac{1}{n}.$$

(69.) Wenn:

$$f^0(n) = n, \quad f(n) = 4n^3 + 3n, \quad f^2(n) = 4f(n)^3 + 3 \,.\, f(n), \text{ \&c.}$$

ist, die Summe der Reihe:

$$\tan^{-1} \frac{1}{2f^0(n)} - \tan^{-1} \frac{1}{2f(n)} + \tan^{-1} \frac{1}{2f^2(n)} - \text{ \&c.}$$

zu finden. —

Auflösung. Das $(x+1)^{te}$ Glied $u_{x+1}$ derselben ist:

$$u_{x+1} = (-1)^x \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{2f^x(n)}.$$

Setzt man nun $f^x(n)$ für $n$ in $(a)$ und multiplicirt mit $(-1)^x$, so erhält man:

$$(-1)^x \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{f^{x+1}(n)} + (-1)^x \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{f^x(n)}$$

$$= 2\,(-1)^x \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{2f^x(n)},$$

Der erste Theil dieser letzten Gleichung ist aber die genaue Differenz von:

$$(-1)^{x+1} \,.\, \tan^{-1} \frac{1}{f^x(n)}$$

weil die beiden Glieder desselben die aufeinanderfolgenden Werthe

der Function $f^x(n)$ in Bezug auf die Veränderliche $x$ mit entgegengesetztem Zeichen sind — und zwar ohne alle Rücksicht auf die Form von $f^x(n)$ als Function von $n$ betrachtet — während der zweite Theil $= 2u_{x+1}$ ist. — Es ist also:

$$2u_{x+1} = \triangle \cdot (-1)^{x+1} \tan^{-1} \frac{1}{f^x(n)}$$

und

$$\Sigma u_{x+1} = \frac{(-1)^{x+1}}{2} \tan^{-1} \frac{1}{f^x(n)} + C,$$

woraus folgt:

$$S_x = \tfrac{1}{2} \left\{ \tan^{-1} \frac{1}{n} + (-1)^{x+1} \tan^{-1} \frac{1}{f^x(n)} \right\};$$

$$S = \tfrac{1}{2} \tan^{-1} \frac{1}{n},$$

denn $f^0(n)$, $f^1(n)$, $f^2(n)$, $f^3(n)$, .... bilden für jeden Werth von $n$ eine schnell divergirende Reihe. Wenn z. B. $n = 1$ ist, so ist diese Reihe:

1, 7, 1393, 10812186007, &c.

(70.) Man soll bestimmen, ob die Reihe 1, 5, 17, 53, 161, 485, ... eine recurrirende ist — und in diesem Falle ihre Relationsscale, ihr allgemeines Glied und ihre Summe finden. — Ihre Summe ist $= 3^x - x + 1$.

(71.) Welche von den beiden Reihen:

1, 0, 3, 2, 6, 11, 23, 49, 223, &c.

1, 0, 3, 2, 5, 10, 24, 51, 247, &c.

ist eine recurrirende — und welches ist ihre Relationsscale?

(72.) Man soll zeigen daß die beiden Reihen:

$\sin\theta$, $\sin 2\theta$, $\sin 3\theta$, . . . . $\sin x\theta$,

$\cos\theta$, $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$, . . . . $\cos x\theta$,

recurrirende sind — und ihre Relationsscalen finden? —

# Siebenter Abschnitt.

---

**Aufgaben und Lehrsätze in Beziehung auf die Entwickelung von Exponentialfunctionen und die Eigenschaften der in der Form $\triangle^m o^n$ enthaltenen Zahlen.**

(1.) Aufgabe. Man soll eine beliebige Function $f(e^t)$ von $e^t$ in eine nach den ganzen positiven Potenzen von $t$ fortlaufende Reihe entwickeln, oder die Coefficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ in der Gleichung:

$$f(e^t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots A_x t^x + \&c.$$

bestimmen. —

Auflösung. Nach Taylor's Satz hat man:

$$f(1+h) = f(1) + \frac{f'(1)}{1} h + \frac{f''(1)}{1.2} h^2 + \&c.$$

also für $h = e^t - 1$ ist:

$$f(e^t) = f(1) + \frac{f'(1)}{1}(e^t - 1) + \frac{f''(1)}{1.2}(e^t - 1)^2 + \&c.$$

Es ist also der Coefficient von $t^x$ in dem ersten Theile $f(e^t)$ dieser Gleichung gleich der Summe der Coefficienten von $t^x$ in den verschiedenen Gliedern des zweiten Theiles. — Nun ist der Coefficient von $t^x$ in $f(1)$ gleich $f(1).o^x = f(1)$ für $x = 0$, und Null in allen andern Fällen. In:

$$\frac{f'(1)}{1}(e^t - 1)$$

ist er:

$$\frac{f'(1)}{1} \cdot \frac{1^x - 0^x}{1.2\ldots.x} = \frac{f'(1)}{1} \cdot \frac{\triangle o^x}{1\ldots.x};$$

in:

$$\frac{f''(1)}{1.2}(e_t - 1)^2, \text{ oder } \frac{f''(1)}{1.2}(e^{2t} - 2e^t + 1)$$

ist er:

$$\frac{f''(1)}{1.2} \times \frac{2^x - 2.1^x + 0^x}{1 \ldots\ldots x} = \frac{f''(1)}{1.2} \cdot \frac{\triangle^2 o^x}{1 \ldots\ldots x}$$

u. s. f., wie sofort einleuchtet, wenn man die Gleichheit:

$$e^{nt} = 1 + \frac{n}{1} t + \frac{n^2}{1.2} t^2 + \ldots \frac{n^x}{1 \ldots\ldots x} t^x + \&c.$$

beachtet. — Fasst man also diese Werthe zusammen, so erhält man:

$$A_x = \frac{1}{1.2 \ldots x} \left\{ f(1) \cdot o^x + \frac{f'(1)}{1} \triangle o^x + \frac{f''(1)}{1.2} \triangle^2 o^x + \&c. \right\}$$

oder wenn die Operations- und Quantitätssymbole getrennt werden:

$$A_x = \frac{1}{1.2 \ldots x} \left\{ f(1) + \frac{f'(1)}{1} \triangle + \frac{f''(1)}{1.2} \triangle^2 + \&c. \right\} o^x$$

$$= \frac{f(1+\triangle)\, o^x}{1.2 \ldots x}.$$

Man hat also den folgenden allgemeinen Satz:

$$f(e^t) = f(1) + \frac{t}{1} f(1+\triangle) o + \frac{t^2}{1.2} f(1+\triangle)\, o^2 + \&c.$$

worin alle Eigenschaften der Zahlen $\triangle^m o^n$ enthalten sind, welche wir hier anzuwenden Gelegenheit haben werden. —

(2.) Wenn also nach irgend einer Methode die Entwickelung von $f(e^t)$ gefunden, oder der Werth von $A_x$ gegeben ist; so kann der von $f(1+\triangle)\, o^x$ als Function von von $x$ gefunden werden, und umgekehrt; denn es ist:

$$A_x = \frac{f(1+\triangle)\, o^x}{1 \ldots x}$$

und:

$$f(1+\triangle)\, o^x = 1.2 \ldots x \,.\, A_x$$

So z. B. ist:

(3.) $(1+\triangle)o^x = 1^x$, $(1+\triangle)^2 o^x = 2^x$, ... $(1+\triangle)^n o^x = n^x$,

welchen positiven, negativen, ganzen, gebrochenen, oder selbst imaginären Werth $n$ auch haben mag. Denn wenn:

$$f(1+\triangle) = (1+\triangle)^n$$

ist, so ist $f(e^t) = e^{nt}$, oder wegen:

$$e^{nt} = 1 + \frac{n}{1} t + \dots \frac{n^x}{1 \dots . x} t^x + \&c.$$

hat man:

$$f(1+\triangle)\, o^x = 1 . 2 \dots x . A_x = n^x.$$

Für $n = -1$ hat man z. B.:

$$\frac{1}{1+\triangle} o^x = (-1)^x,$$

oder:

$$\{1 - \triangle + \triangle^2 - \&c.\}\, o^x$$

$$= o^x - \triangle o^x + \triangle^2 o^x - \&c.$$

Aber in dieser, so wie in allen ähnlichen Reihen, können alle Glieder nach $\triangle^x o^x$ hinweggelassen werden, weil sie vermöge der Eigenschaft dieser Zahlen einzeln $= 0$ sind, so daß man für jeden Werth von $x$ hat:

$$o^x - \triangle o^x + \triangle^2 o^x \dots \pm \triangle^x o^x = (-1)^x,$$

oder:

$$\triangle^x o^x - \triangle^{x-1} o^x + \dots \pm \triangle o^x \mp o^x = 1.$$

Es wird nicht unzweckmäßig sein, dieses Resultat an einem Zahlenbeispiele zu verificiren. Setzt man z. B. $n = 5$, und nimmt die Werthe von $\triangle^5 o^5$, $\triangle^4 o^5$, ... aus der Tafel in Abschn. 1, Nr. 33; so erhält man:

$$120 - 240 + 150 - 30 + 1 = 1.$$

(4.) Auf gleiche Weise ergibt sich, daß:

$$\{\log(1+\triangle)\}^n o^x = 0$$

ist. außer für $n = x$, in welchem Falle der Werth dieser Function $= 1 . 2 \ldots n$ ist. — Denn wegen $(\log e^t)^n = t^n$ ist der Coefficient von $t^x$ in der Entwickelung dieser Function $= 0$, außer für $x = n$, in welchem Falle $A_x = A_n = 1$; also $1 . 2 \ldots n A_n = 1 . 2 \ldots n$ ist.

(5.) Für $n = 1$ und $x > 1$ hat man:

$$\frac{\triangle o^x}{1} - \frac{\triangle^2 o^x}{2} + \ldots \pm \frac{\triangle^x o^x}{x} = 0,$$

welches Resultat ebenfalls leicht an Zahlenbeispielen verificirt werden kann. —

(6.) Es ist:

$$\{\log(1 + \triangle)\}^n . f(\triangle)\, o^x = x(x-1) \ldots$$
$$\ldots (x - n + 1) f(\triangle)\, o^{x-n}.$$

Denn der Coefficient von $t^x$ in der Entwickelung von $t^n . f(e^t - 1)$ ist offenbar mit dem von $t^{x-n}$ in der von $f(e^t - 1)$ identisch. — Der erste Coefficient ist aber:

$$\frac{\{\log(1 + \triangle)\}^n f(\triangle) o^x}{1 . 2 \ldots x},$$

und der zweite ist:

$$\frac{f(\triangle) o^{x-n}}{1 . 2 \ldots (x-n)},$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so ergibt sich der Satz sofort. —

(7.) Setzt man $x + n$ für $n$ und $f(\triangle) = \triangle^{-n}$, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden:

$$\triangle^{-n} o^x = \frac{1 . 2 \ldots x}{1 . 2 \ldots (x+n)} \left\{ \frac{\log(1 + \triangle)}{\triangle} \right\}^n o^{x+n}$$

Vermittelst dieser Gleichung kann man die Reihe:

$$\triangle^0 o^x,\ \triangle o^x,\ \triangle^2 o^x,\ \&c.$$

nach einem gleichförmigen Gesetze beliebig weit rückwärts fort-

setzen — muß aber alsdann mehr als Definition von $\Delta^{-n} o^x$, wie in einem andern Sinne aufgefaßt werden, weil der Werth dieses Ausdruckes oder des gleichgeltenden $\Sigma^n o^x$ nicht fixirt ist, wenn blos die obere Grenze $o$ des Integrales angegeben ist. —

(8.) Man soll zeigen, daß für jeden Werth von $n$ die Gleichheit:

$$f\{(1+\Delta)^n\} o^x = n^x . f(1+\Delta) o^x$$

stattfindet. —

Auflösung. Geht man von der identischen Gleichung:

$$f\{(e^t)^n\} = f(e^{nt})$$

aus, so ist nach Abschn. 7, Nr. 1 der Coefficient von $t^x$ im ersten Theile, als Function von $e^t$ betrachtet:

$$\frac{f\{1+\Delta)^n\} o^x}{1.2....x}$$

und im zweiten Theile:

$$n^x . \frac{f(1+\Delta) o^x}{1.2...x}.$$

Durch Gleichsetzung beider Werthe ergibt sich das gesuchte Resultat, welches sich oft zur Vermeidung weitläufiger Entwickelungen benutzen läßt. — So z. B. ist:

$$(9.)\quad \{1+\sqrt{(1+\Delta)}\}^m o^x = \frac{1}{2^x} . (2+\Delta)^m o^x,$$

$$\{(1+\Delta)^n - 1\}^m o^x = n^x . \Delta^m o^x,$$

$$\{1+(1+\Delta)^n\}^m o^x = n^x . (2+\Delta)^m o^x.$$

(10.) Man soll die folgenden sehr allgemeinen Eigenschaften der in der Form $\Delta^n o^m$ enthaltenen Zahlen nachweisen:

$$\left\{f(1+\Delta) + f\left(\frac{1}{1+\Delta}\right)\right\} o^{2x-1} = o; \ldots (a),$$

$$\left\{f(1+\Delta) - f\left(\frac{1}{1+\Delta}\right)\right\} o^{2x} = 0; \ldots (b).$$

welche Form die durch $f$ bezeichnete Function auch haben mag. —

Auflösung. Man setze:

$$f(e^t) = A_0 + A_1\, t + A_2\, t^2 + \&c.$$

so ist:

$$f(e^{-t}) = A_0 - A_1\, t + A_2\, t^2 - \&c.$$

woraus erhellet, daß die Summe:

$$f(e^t) + f(e^{-t})$$

keine ungeraden und die Differenz:

$$f(e^t) - f(e^{-t})$$

keine geraden Potenzen von $x$ enthält. — Es sind also die Coefficienten von $t^{2x-1}$ und von $t^{2x}$ in den resp. Entwickelungen dieser Summe und Differenz $= 0$. — Wenn man aber das allgemeine Theorem in Nr. 1 auf den als Function von $e^t$ betrachteten Ausdruck:

$$f(e^t) \pm f\left(\frac{1}{e^t}\right)$$

anwendet, so erhält man für diese Coefficienten resp. die ersten Theile der Gleichungen $(a)$ und $(b)$, woraus die Wahrheit des Satzes folgt. — Derselbe ergibt sich auch aus (8) für $n = -1$ Die folgenden speciellen Fälle verdienen ihrer merkwürdigen Form wegen hier noch angeführt zu werden.

(11.) Setzt man:

$$f(1+\Delta) = \frac{1}{1+(1+\Delta)},$$

so hat man nach $(b)$:

$$\frac{\Delta}{2+\Delta}\, o^{2x} = 0.$$

oder:

$$\frac{\Delta o^{2x}}{2} - \frac{\Delta^2 o^{2x}}{2^2} + \frac{\Delta^3 o^{2x}}{2^3} \dots \pm \frac{\Delta^{2x} o^{2x}}{2^{2x}} = 0.$$

(12.) Für:

$$f(1+\Delta) = \{1-(1+\Delta)\}^n$$

hat man:

$$f\left(\frac{1}{1+\triangle}\right)=\left\{1-\frac{1}{1+\triangle}\right\}^n=\left(\frac{\triangle}{1+\triangle}\right)^n$$

und:

$$\left(\frac{\triangle}{1+\triangle}\right)^n o^{2x-1}=(-1)^{n+1}\triangle^n o^{2x-1},$$

$$\left(\frac{\triangle}{1+\triangle}\right)^n o^{2x}=(-1)^n\triangle^n o^{2x},$$

oder beide Gleichungen in eine zusammengezogen:

$$\left(\frac{\triangle}{1+\triangle}\right)^n o^x=(-1)^{n+x}\triangle^n o^x.$$

(13.) Wenn man für $f$ eine transcendente Form annimmt und z. B. setzt:

$$f(1+\triangle)=\int\frac{d\triangle}{\triangle}\log(1+\triangle),$$

so hat man:

$$f(1+\triangle)+f\left(\frac{1}{1+\triangle}\right)=\tfrac{1}{2}\log(1+\triangle)^2,$$

aber nach Nr. 4 ist:

$$\log(1+\triangle)^2\, o^{2x}=0,$$

mit Ausnahme von $2x=2$, oder $x=1$; folglich:

$$f\left(\frac{1}{1+\triangle}\right)o^{2x}=-f(1+\triangle)o^{2x}.$$

Setzt man dies in die Gleichung ($b$) in Nr. 10, so ergibt sich:

$$f(1+\triangle)\,o^{2x}=0,$$

und da in dem gegenwärtigen Falle $f(1+\triangle)$ die Transcendente:

$$\int\frac{d\triangle}{\triangle}\log(1+\triangle)=\frac{\triangle}{1^2}-\frac{\triangle^2}{2^2}+\text{\&c.}$$

bedeutet; so wird unsere Gleichung:

$$\frac{\Delta o^{2x}}{1^2} - \frac{\Delta^2 o^{2x}}{2^2} + \ldots \pm \frac{\Delta^{2x} o^{2x}}{(2x)^2} = 0,$$

welche in allen Fällen, $x = 1$ ausgenommen, durch wirkliche Substitution der aus der Tafel in Abschn. 1, Nr. 32 genommenen Werthe verificirt wird. — So weit kann die Trennung der Operations- und Quantitätssymbole getrieben werden, ohne daß man irrige Resultate zu befürchten hat. — Welchen Werth der erste Theil der obigen Gleichung annimmt, wenn der Exponent von $o$ eine ungerade Zahl ist, wird man später (Abschn. 8, Nr. 22) sehen. —

(14.) Lehrsatz. — Wenn $f_1(\Delta)$, $f_2(\Delta)$ irgend zwei Functionen von $\Delta$ bedeuten, so findet folgende Gleichheit statt:

$$\{f_1(\Delta) \cdot f_2(\Delta)\} o^x = f_1(\Delta) \cdot f_2(\Delta') \{o + o'\}^x,$$

worin $\Delta$ und $\Delta'$ resp. sich auf 0 und 0′ beziehen. —

Beweis. Man setze:

$$f_1(e^t - 1) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \&c.$$

$$f_2(e^t - 1) + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \&c.$$

so wird:

$$f_1(e^t - 1) \times f_2(e^t - 1) =$$

$$A_0 a_0 + \{A_1 a_0 + A_0 a_1\} t + \{A_2 a_0 + A_1 a_1 + A_0 a_2\} t^2 + \&c.$$

Der Coefficient von $t^x$ im ersten Theile dieser Gleichung wird nach dem allgemeinen Theoreme in Abschn. 7. Nr. 1 ausgedrückt durch:

$$\frac{\{f_1(1 + \Delta - 1) \times f_2(1 + \Delta - 1)\} o^x}{1 \ldots x} =$$

$$\frac{\{f_1(\Delta) \times f_2(\Delta)\} o^x}{1 \ldots x}, \qquad (a).$$

während derselbe im zweiten Theile ist:

$$A_x a_0 + A_{x-1} a_1 + \ldots A_0 a_x, \qquad (b).$$

Da aber $A_x$ und $a_x$ die Coefficienten von $t^x$ in den resp. Entwicke-

lungen von $f_1(e^t-1)$ und $f_2(e^t-1)$ sind, so hat man nach demselben allgemeinen Theoreme:

$$A_x = \frac{f_1(\Delta)\,o^x}{1\ldots x},\quad a_x = \frac{f_2(\Delta)o^x}{1\ldots x};$$

folglich:

$$A_{x-1} = \frac{f_1(\Delta)\,o^{x-1}}{1\ldots(x-1)},\ \text{\&c.}$$

$$a_0 = f_2(\Delta)o^0,\ a_1 = \frac{f_2(\Delta)o^1}{1}\ \text{\&c.}$$

Substituirt man diese Werthe in ($b$) so ergibt sich:

$$\frac{1}{1\ldots x}\Big\{f_1(\Delta)\,o^x \cdot f_2(\Delta)\,o^0 + \frac{x}{1}f_1(\Delta)\,o^{x-1}\cdot f_2(\Delta)\,o^1$$

$$+ \frac{x(x-1)}{1.2}\Big\{f_1(\Delta)\,o^{x-2}\cdot f_2(\Delta)\,0^2 + \text{\&c.}\ldots\Big\}$$

oder:

$$\frac{1}{1\ldots x}f_1(\Delta)f_2(\Delta')\{v+o'\}^x,$$

indem die Operations- und Quantitätssymbole getrennt werden und $\Delta, \Delta'$ sich resp. auf $o, o'$ beziehen. Durch Vergleichung dieses letzten Resultates mit ($a$) ergibt sich der Satz unmittelbar.

(15.) Auf ganz ähnliche Weise ergibt sich das allgemeine Theorem:

$$\{f_1(\Delta)\times f_2(\Delta)\times f_3(\Delta)\times \text{\&c.}\}\,o^x =$$

$$f_1(\Delta)\cdot f_2(\Delta')\cdot f_3(\Delta)\text{\&c.}\,\{o+\theta'+\theta''+\text{\&c.}\}^x.$$

(16.) Ferner läßt sich leicht zeigen, daß man für jeden Werth von $n$ hat:

$$\{(1+\Delta)^n f(\Delta)\}\,o^x = f(\Delta)\{n+o\}^x,$$

indem $(n+o)^x$ nach Potenzen von $o$ entwickelt und dann $f(\Delta)$ an jeder einzelnen Potenz angebracht wird. — Denn wenn in Nr.

14, $(1+\Delta)^n$ für $f_1(\Delta)$ und $f(\Delta)$ für $f_2(\Delta)$ gesetzt wird, so erhält man:

$$(1+\Delta)^n f(\Delta)\, o^x =$$

$$(1+\Delta)^n o^x \,.\, f(\Delta)\, o^0 + \frac{x}{1}(1+\Delta)^n o^{x-1} \,.\, f(\Delta)\, o^1 + \&c.$$

Nach Abschn. 7, Nr. 3 ist aber:

$$(1+\Delta)^n o^x = n^x, \quad (1+\Delta)^n o^{x-1} = n^{x-1}, \&c.$$

so daß der zweite Theil der letzten Gleichung wird:

$$n^x \,.\, f(\Delta)\, o^0 + \frac{x}{1} n^{x-1} \,.\, f(\Delta)\, o^1 + \&c.$$

oder durch Trennung der Operations- und Quantitätssymbole:

$$f(\Delta) \left\{ n^x o^0 + \frac{x}{1} n^{x-1} o^1 + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2} n^{x-2} o^2 + \&c. \right\}$$

$$= f(\Delta) \{n + o\}^x.$$

(17.) Als eine specielle Anwendung hiervon sei $f(\Delta) = \Delta^m$, $n = -1$; so wird:

$$\Delta^m (-1+o)^x = \frac{\Delta^m}{1+\Delta} o^x,$$

oder wegen:

$$\Delta^m (-1+o)^x = (-1)^x \,.\, \Delta^m (1-o)^x,$$

endlich:

$$\Delta^m (1-o)^x = (-1)^x \,.\, \frac{\Delta^m}{1+\Delta} o^x$$

$$= (-1)^x \,.\, \{ \Delta^m o^x - \Delta^{m+1} o^x + \ldots \pm \Delta^x o^x \}.$$

Von dieser Transformation ist bereits Abschn. 1, Nr. 25 Gebrauch gemacht — und die in Abschn. 1, Nr. 27 angewandte ergibt sich ganz ebenso. — Denn setzt man in dem Theoreme in Nr. 14 wieder $f(\Delta) = \Delta^m$, $n = -\alpha$, so erhält man:

$$\Delta^m(-\alpha+o)^x \cdot \frac{\Delta^m}{(1+\Delta)^\alpha}\, o^x,$$

folglich:

$$\Delta^m(\alpha-o)^x = (-1)^x \cdot \frac{\Delta^m}{(1+\Delta)^\alpha}\, o^x.$$

Setzt man $m = o$ so verschwinden die Glieder von $\Delta(\alpha-o)^x$, welche auf das erste Glied:

$$\Delta^0\, \alpha^x\, o^0 = \alpha^x \cdot \Delta^0\, o^0 = \alpha^x$$

folgen, sämmtlich, und man hat blos:

$$\alpha^x = (-1)^x \cdot \frac{1}{(1+\Delta)^\alpha}\, o^x$$

wie behauptet worden. —

(18.) Lehrsatz. — Es ist:

$$f(\Delta)\{(a+o)^x \cdot (b+o)^y \cdot (c+o)^z \cdot \&c.\}$$
$$= f(\Delta) \cdot (1+\Delta')^a \cdot (1+\Delta'')^b \cdot \&c.$$
$$\times \{(o+o')^x \cdot (o+o'')^y \cdot (o+o''')^z \cdot \&c.\}.$$

indem sich $\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$ resp. auf $o, o', o'', \ldots$ beziehen. —
Beweis: Es ist:

$$f(\Delta)(a+o)^x \cdot (b+o)^y =$$

$$a^x f(\Delta)(b+o)^y + \frac{x}{1}\, a^{x-1} f(\Delta)\, o\, (b+o)^y + \&c.$$

$$= a^x \cdot \Big\{ b^y f(\Delta)\, o^0 + \frac{y}{1}\, b^{y-1} f(\Delta)\, o^1 +$$

$$\frac{y(y-1)}{1.2}\, b^{y-2} f(\Delta)\, o^2 + \&c. \Big\}$$

$$+ \frac{x}{1}\, a^{x-1} \Big\{ b^y f(\Delta)\, o^1 + \frac{y}{1}\, b^{y-1} f(\Delta)\, o^2 + \&c. \Big\}$$

$$+ \frac{x(x-1)}{1.2}\, a^{x-2} \times \&c. + \&c.$$

Nach Abschn. 7, Nr. 3 ist aber:

$$b^y = (1+\Delta)^b\, o^y;\ b^{y-1} = (1+\Delta)^b\, o^{y-1}\ \&c.;$$

und wenn diese Werthe in den obigen Ausdruck gesetzt werden; so erhält man:

$$a^x \left\{ (1+\Delta)^b\, o^y . f(\Delta) o^0 + \frac{y}{1} (1+\Delta)^b\, o^{y-1} . f(\Delta)\, o^1 + \&c. \right\}$$

$$+ \frac{x}{1}\, a^{x-1} \left\{ (1+\Delta)^b\, o^y . f(\Delta) o^1 + \frac{y}{1} (1+\Delta)^b\, o^{y-1} f(\Delta) o^2 + \&c. \right\}$$

$$+ \frac{x(x-1)}{1.2} \times \&c. + \&c.$$

oder wenn die Operations- und Quantitätssymbole getrennt und wieder Accente zur Unterscheidung angewandt werden:

$$a^x . f(\Delta) . (1+\Delta'')^b \left\{ o''^y . o^0 + \frac{y}{1}\, o''^{y-1}\, o^1 + \&c. \right\}$$

$$+ \frac{x}{1}\, a^{x-1} . f(\Delta) . (1+\Delta'')^b \left\{ o''^y . o^1 + \frac{y}{1}\, o''^{y-1}\, o^2 + \&c. \right\} + \&c.$$

Die abgekürzten Ausdrücke der in den Klammern stehenden Reihen sind resp.:

$$o^0\,(o+o'')^y,\ o^1\,(o+o'')^y,\ o^2\,(o+o'')^y,\ \&c.$$

und die Werthe von $a^x, a^{x-1}, \ldots$ sind nach Abschn. 7, Nr. 3:

$$a^x = (1+\Delta')^a\, o'^x;\ a^{x-1} = (1+\Delta')^a\, o'^{x-1},\ \&c.$$

so daß sich unsere Formel durch Substitution dieser Werthe in folgende verwandelt:

$$f(\Delta) . (1+\Delta'')^b \left\{ o^0\,(o+o'')^y \right\} . (1+\Delta')^a\, o'^x +$$

$$+ \frac{x}{1} . f(\Delta)\,(1+\Delta'')^b \left\{ o^1\,(o+o'')^y \right\} . (1+\Delta')^a\, o'^{x-1} + \&c.$$

Werden endlich die Operations- und Quantitätssymbole getrennt, so ergibt sich:

$$f.(\Delta)(1+\Delta')^a(1+\Delta'')^b\left\{(o+o'')^y\left(o'^x o^0+\frac{x}{1}o'^{x-1}o^1+\&c.\right)\right\}$$

$$=f(\Delta)(1+\Delta')^a(1+\Delta'')^b\{(o+o')^x.(o+o'')^y\},$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann offenbar das fragliche Theorem in seiner ganzen Allgemeinheit erwiesen werden. —

---

# Achter Abschnitt.

## Anwendung der vorhergehenden Theoreme zur Entwickelung von Functionen, zur Summirung von Reihen, etc.

(1.) Man soll $\frac{1}{1+e^t}$ nach Potenzen von $t$ entwickeln. —

Auflösung. Man hat:

$$f(e^t) = \frac{1}{1+e^t} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \&c.$$

$$f(1+\triangle)\,0^x = \frac{1}{1+(1+\triangle)}\,0^x = \frac{1}{2+\triangle}\,0^x;$$

folglich nach Abschn. 7, Nr. 2:

$$A_x = \frac{1}{1.2\ldots.x} \times \frac{1}{2+\triangle}\,0^x$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots x}\left\{\frac{0^x}{2} - \frac{\triangle 0^x}{2^2} + \ldots \pm \frac{\triangle^x\, 0^x}{2^{x+1}}\right\},$$

also:

$$A_0 = 1.\frac{0^0}{2} = \frac{1}{2},\ A_1 = \frac{1}{1}\left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4},\ A_2 = 0,\ \&c.$$

und endlich:

$$\frac{1}{1+e^t} = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} + t^2\,.\,\&c.$$

Anmerkung. Der große Vortheil, welcher aus der Anwen=

dung dieser Functionen entspringt, besteht darin: daß jede Reihe derselben, wie:

$$a\,.\,o^x + b\,\Delta' o^x + c\,\Delta^2\,o^x + \text{\&c.}$$

wie complicirt sie auch sein mag, nothwendig mit einer endlichen Anzahl $(x+1)$ von Gliedern abbricht, so daß man von unzählig vielen verschiedenen Entwickelungen das allgemeine Glied in verhältnißmäßig einfacher Form anzugeben im Stande ist, was auf andere Weise kaum thunlich sein dürfte, wenn man nicht zur combinatorischen Analysis seine Zuflucht nehmen will, was nach unserer Meinung niemals geschehen muß, so lange sich alle anderen Kunstgriffe und Feinheiten der Analysis nicht als unbrauchbar erweisen. —

(2.) Man soll $(e^t - 1)^n$ nach Potenzen von $t$ entwickeln. — Auflösung. Es ist:

$$f(e^t) = (e^t - 1)^n\;;\; f(1+\Delta)\,o^x = (1+\Delta-1)^n\,o^x = \Delta^n\,o^n\;;$$

also: $$(e^t - 1)^n = \Delta^n\,o^0 + \frac{\Delta^n\,o^1}{1}\,t + \frac{\Delta^n\,o^2}{1\,.\,2}\,t^2 + \text{\&c.}$$

$$= \frac{\Delta^n\,o^n}{1\ldots n}\,t^n + \frac{\Delta^n\,o^{n+1}}{1\,.\,2\ldots(n+1)}\,t^{n+1} + \text{\&c.}$$

Dieser elegante Ausdruck ist zuerst von Ivory und später von Dr. Brinkley angegeben; aber beide Geometer sind auf einem von dem obigen ganz verschiedenen Wege dazu gelangt. — Brinkley hat auch das Verdienst: die in der Form $\Delta^m\,o^n$ enthaltenen Zahlen unter die Data der Analysis, d. h. die Elemente, auf welche man zuletzt zurückkommen muß, aufgenommen zu haben. — Ferner muß noch bemerkt werden: daß er die Entwickelung von $\frac{1}{1+e^t}$ zuerst in der obigen Form angegeben hat. —

(3.) Man soll $\frac{t}{e^t - 1}$ nach Potenzen von $t$ entwickeln. —

Auflösung. Es ist:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{\log(e^t)}{e^t - 1} = f(e^t)\,;$$

$$f(1+\Delta)\,o^x = \frac{\log(1+\Delta)}{(1+\Delta)-1}\,o^x = \left\{\frac{o^x}{1} - \frac{\Delta o^x}{2} + \ldots \pm \frac{\Delta^x o^x}{x+n}\right\},$$

und mithin der Coefficient von $t^x$ oder:

$$A_x = \frac{1}{1.2\ldots.x}\left\{\frac{o^x}{1} - \frac{\Delta o^x}{2} + \frac{\Delta^2 o^x}{3} \ldots \pm \frac{\Delta^x o^x}{x+1}\right\}.$$

Dieser letzte Ausdruck für $A_x$ ist zuerst von dem Verfasser in der Abhandlung: On the Developement of Exponential Functions; Phil. Trans. 1815 gegeben. — Ferner läßt sich leicht zeigen, daß in der Entwickelung von $\frac{t}{e^t-1}$ alle $A_x$ für ungerade Werthe von $x$, $x=1$ ausgenommen, $=o$ sind, woraus folgt, daß die Gleichung:

$$\frac{\Delta o^{2x-1}}{2} - \frac{\Delta^2 o^{2x-1}}{3} + \ldots + \frac{\Delta^{2x-1}\,o^{2x-1}}{2x} = 0$$

für alle Werthe von $x$, ausgenommen $x=1$, stattfindet. —

Der Coefficient von $t^{2x}$ in derselben Entwickelung ist bekanntlich:

$$(-1)^{x-1}.\frac{B_{2x-1}}{1.2\ldots.2x},$$

und wenn man dies mit:

$$\frac{f(1+\Delta)\,o^{2x}}{1.2\ldots.2x},$$

vergleicht; so erhält man den folgenden sehr einfachen Ausdruck für die Bernoulli'schen Zahlen:

$$B_{2x-1} = (-1)^{x+1}.f(1+\Delta)o^{2x}$$

$$= (-1)^{x+1}.\frac{\log(1+\Delta)}{\Delta}\,o^{2x}$$

oder:

$$B_{2x-1} = (-1)^{x+1}\left\{\frac{o^{2x}}{1} - \frac{\Delta o^{2x}}{2} \ldots. \pm \frac{\Delta^{2x}\,o^{2x}}{2x+1}\right\}.$$

woraus sich successive ergibt:

$$B_1 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}\ ;\ B_3 = +\frac{1}{2} - \frac{14}{3} + \frac{36}{4} - \frac{24}{5} = \frac{1}{30}, \text{ \&c.}$$

(4.) Es soll $\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^n$ nach Potenzen von $t$ entwickelt werden. —

Auflösung. Da diese Function gleich:

$$\left(\frac{\log(e^t)}{e^t - 1}\right)^n$$

ist, so ist der Coefficient von $t^x$ nach Abschn. 7, Nr. 1 offenbar:

$$\frac{1}{1.2\ldots x} \times \left\{\frac{\log(1 + \triangle)}{\triangle}\right\}^n o^x.$$

Wegen der Entwickelung dieser Function in eine zur numerischen Berechnung geeignete Formel verweisen wir den Leser auf unsere oben angeführte Abhandlung. — Die vollständige Entwickelung der ursprünglichen Function in eine höchst elegante Reihe hat Brinkley in den Philos. Trans. 1807, *i* gegeben. — Da man nach Absch. 7, Nr. 7 hat:

$$\frac{1}{1\ldots(x+n)} \cdot \left\{\frac{\log(1 + \triangle)}{\triangle}\right\}^n o^{x+n} = \frac{1}{1\ldots x} \triangle^{-n} o^x,$$

so ist der Coefficient von $t^{x+n}$ in der Entwickelung der gegebenen Function, oder der von $t^x$ in der Entwickelung von:

$$(e^t - 1)^{-n}$$

offenbar:

$$\frac{\triangle^{-n} o^x}{1.2\ldots x},$$

und folglich findet die von Brinkley blos für positive Werthe von $n$ bewiesene Gleichung:

$$(e^t - 1)^n = \frac{\triangle^n o^n}{1\ldots n} t^n + \frac{\triangle^n o^{n+1}}{1\ldots(n+1)} t^{n+1} + \text{\&c.}$$

auch für negative Werthe von $n$ statt. —

(5.) Man soll $e^{e^t}$ nach Potenzen von $t$ entwickeln. —

Auflösung. Es ist:

$$f(e^t) = e^{e^t}, \; f(1+\triangle)\,o^x = e^{1+\triangle}\,o^x = e\,.\,e^{\triangle}o^x,$$

woraus folgt:

$$A_x = \frac{e^x}{1\,.\,2\,\ldots\,x} \times e^{\triangle}\,o^x,$$

$$= \frac{e}{1\,.\,2\,\ldots\,x}\left\{o^x + \frac{\triangle o^x}{1} + \frac{\triangle^2 o^x}{1\,.\,2} + \ldots \frac{\triangle^2 o^x}{1\ldots x}\right\}.$$

Also:

$$A_0 = e,\ A_1 = e,\ A_2 = \frac{2e}{1\,.\,2},\ A_3 = \frac{5e}{1\,.\,2\,.\,3},\ \text{\&c.}$$

und:

$$e^{e^t} = e + e\,\frac{t}{1} + 2e\,.\,\frac{t^2}{1\,.\,2} + 5e\,.\,\frac{t^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{\&c.}$$

(6.) Man soll $\frac{1}{\sqrt{(1+e^t)}}$ und allgemein $(a+e^t)^n$ nach Potenzen von $t$ entwickeln. —

Auflösung. Es ist:

$$f(e^t) = (a+e^t)^n;\quad f(1+\triangle) = (1+a+\triangle)^n,$$

$$A_x = \frac{1}{1\,.\,2\,\ldots\,.\,x} \times \{(1+a)+\triangle\}^n\,o^x,$$

$$= \frac{(1+a)^n}{1\,.\,2\,\ldots\,.\,x}\left\{o^x + \frac{n}{1}\,.\,\frac{\triangle o^x}{1+a} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{\triangle^2 o^x}{(1+a)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,x}\,.\,\frac{\triangle^x o^x}{(1+a)^x}\right\}.$$

Also für $a = 1$, $n = -\frac{1}{2}$ hat man:

$$A_x = \frac{1}{\sqrt{2}\,.\,1\,.\,2\,\ldots\,.\,x}\left\{o^x - \frac{1}{4}\triangle o^x + \frac{1\,.\,3}{4\,.\,8}\triangle^2 o^x - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \pm \frac{1\,.\,3\,\ldots\,(2x-1)}{4\,.\,8\,\ldots\,(4x)}\triangle^x o^x\right\}$$

und in derselben Weise läßt sich leicht jede algebraische Function von $e^t$ entwickeln. —

(7.) Man soll ebenso eine Function $f(e^t, e^{t'}, e^{t''}, \&c.)$ von mehrern Veränderlichen $t, t', t''\ldots$ entwickeln. —

Auflösung. Wenn zunächst $t$ allein als veränderlich angesehen wird, so ist nach dem Vorhergehenden der Coefficient von $t^x$ offenbar:

$$\frac{f\{1+\triangle, e^{t'}, e^{t''}, \&c.\}\, o^x}{1.2\ldots x},$$

worin $t$ nicht vorkommt, welcher Ausdruck aber eine Function von $e^{t'}, e^{t''},\ldots$ ist, und selbst nach Potenzen von $t'$ entwickelt werden kann. — Wird der Coefficient von $t'^y$ in dieser Entwickelung auf ähnliche Weise bestimmt, so erhält man für denselben:

$$\frac{f\{1+\triangle, 1+\triangle', e^{t''}, \&c.\}\, o^x . o'^y}{1.2\ldots x \times 1.2\ldots y},$$

wo jetzt $\triangle'$ und $o'^y$ einander ebenso entsprechen, wie zuvor $\triangle$ und $o^x$ (Abschn. 7, Nr. 14). — Dieser letzte Ausdruck ist der Coefficient von $t^x . t'^y$ in der Entwickelung der gegebenen Function, wenn blos $t, t'$ als Veränderliche, aber $t'',\ldots$ als Constanten angesehen werden. — Fährt man auf diese Weise fort zu entwickeln und bezeichnet den Coefficienten von $t^x . t'^y . t''^z\ldots$ in der letzten Entwickelung mit $A_{x, y, z,\ldots}$; so findet man:

$$A_{x, y, z,\ldots} = \frac{f\{1+\triangle, 1+\triangle', 1+\triangle'', \&c.\}\, o^x . o'^y . o''^z \, \&c.}{1.2\ldots x \times 1.2\ldots y \times 1.2\ldots. z \times \&c.}.$$

(8.) Man soll:

$$f\{e^{t+t'+t''+\&c.}\}$$

nach Potenzen von $t, t', \ldots$ entwickeln. —

Auflösung. In diesem speciellen Falle ist:

$$A_{x, y, z, \&c.} = \frac{f\{(1+\triangle)(1+\triangle')(1+\triangle'').\&c.\}\, o^x . o'^y . o''^z \, \&c.}{1.2\ldots x \times 1.2\ldots y \times 1.2\ldots z \times \&c.}$$

und wenn:

$$K(1+\triangle)^n \cdot (1+\triangle')^n \cdot \&c.$$

ein beliebiges Glied der Entwickelung von:

$$f\{(1+\triangle)(1+\triangle') \cdot \&c.\}$$

ist; so hat man:

$$K \cdot (1+\triangle)^n o^x \cdot (1+\triangle)^n o^y \cdot (1+\triangle)^n o^z \cdot \&c.$$

$$= K \cdot n^x \cdot n^y \cdot n^z \cdot \&c.$$

$$= K \cdot n^{x+y+z+\&c.} = K(1+\triangle)^n \, o^{x+y+z+\&c.}.$$

(Abschn. 7, Nr. 3). — Hieraus sieht man, daß sich aus:

$$f\{(1+\triangle)(1+\triangle') \cdot \&c.\} \, o^x \cdot o'^y \cdot \&c.$$

dieselbe Reihe von Gliedern ergibt, als aus:

$$f(1+\triangle) \, o^{x+y+z+\&c.},$$

und daß folglich:

$$A_{x,y,z,\&c.} = \frac{f(1+\triangle) \, o^{x+y+z+\&c.}}{1 \cdot 2 \ldots x \times 1 \cdot 2 \ldots y \times 1 \cdot 2 \ldots z \times \&c.}$$

ist. Dieses Resultat ergibt sich auch aus dem Polynomialtheoreme in Verbindung mit dem Theoreme in Abschn. 7, Nr. 1; und umgekehrt läßt sich der polynomische Lehrsatz aus dem hiesigen Theoreme ableiten. — Auch erhellet aus dem Vorhergehenden, daß sich die Entwickelung von:

$$f(e^{t+t'+\&c.})$$

direct aus der von $f(e^t)$ ergibt, indem der Coefficient von $t^x \cdot t'^y \cdot t''^z$ ... in der Entwickelung der ersten Function dem Producte aus den Coefficienten von $t^{x+y+z+\&c.}$ in der Entwickelung der zweiten und aus:

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots (x+y+z+\&c.)}{1 \ldots x \times 1 \ldots y \times 1 \ldots z + \&c.}$$

gleich ist. —

(9.) Man soll beweisen, daß:

$$\frac{1}{2+\Delta} o^{2x-1} = (-1)^x \cdot \frac{2^{2x}-1}{2x} \cdot B_{2x-1}$$

ist, wo $B_{2x-1}$ die $x^{te}$ Bernoulli'sche Zahl bedeutet. —

Auflösung. Nach Abschn. 8, Nr. 1 ist:

$$\frac{1}{2+\Delta} o^{2x-1}$$

gleich dem Producte aus dem Coefficienten von $t^{2x-1}$ in der Entwickelung von $\frac{1}{1+e^t}$ und aus $1.2.3\ldots(2x-1)$, d. h. gleich dem Coefficienten von $t^{2x}$ in der Entwickelung von $\frac{t}{1+e^t}$, mit derselben Größe multiplicirt. —

Dieser letzte Coefficient ist aber auch $= -(2^{2x}-1)$ multiplicirt mit dem Coefficienten derselben Potenz von $t$ in der Entwickelung von $\frac{t}{e^t-1}$, d. h. mit:

$$(-1)^{x+1} \cdot \frac{B_{2x-1}}{1.2\ldots 2x}$$

und es muß folglich sein:

$$\frac{1}{2+\Delta} o^{2x-1} =$$

$$1.2\ldots(2x-1) \times -(-1)^{x+1} \cdot \frac{2^{2x}-1}{1.2\ldots 2x} \cdot B_{2x-1}$$

$$= (-1)^x \cdot \frac{2^{2x}-1}{2x} \cdot B_{2x-1} \,.$$

(10.) Man soll die Reihe:

$$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + \text{\&c.}$$

summiren. —

Auflösung. Nach Abschn. 7, Beispiel 3 ist:

$$(1 + \triangle)\, o^n = 1^n,\ (1 + \triangle)^2\, o^n = 2^n,\ \text{\&c.}$$

und folglich wird die Reihe durch Substitution:

$$S = (1 + \triangle)\, o^n - (1 + \triangle)^2\, o^n + (1 + \triangle)^3\, o^n - \text{\&c.}$$

oder wenn die Operations- und Quantitätssymbole getrennt werden:

$$S = \{(1 + \triangle) - (1 + \triangle)^2 + (1 + \triangle)^3 - \text{\&c.}\}\, o^n$$

$$= \frac{1 + \triangle}{1 + (1 + \triangle)}\, o^n = \left\{1 - \frac{1}{2 + \triangle}\right\} o^{2n},$$

weil diese Function nach Potenzen von $\triangle$ entwickelt, dieselbe Reihe liefert, wie die andere — nämlich:

$$S = \frac{o^n}{2} + \frac{\triangle o^n}{2^2} - \frac{\triangle^2\, o^n}{2^3} + \ldots \pm \frac{\triangle^n\, o^n}{2^{n+1}}.$$

Hiernach ist:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \text{\&c.} = \frac{1}{2},$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \text{\&c.} = \frac{1}{4},$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{\&c.} = 0,$$

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{\&c.} = \frac{1}{8},$$

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 3^4 + \text{\&c.} = 0;\ \text{\&c.}$$

Es sind also die Summen der Reihen mit geraden Potenzen $= 0$, wie es auch sein muß; denn setzt man in Gleichung ($b$) in Abschn. 7, Nr. 10 für:

$$f(1 + \triangle)$$

die Größe:

$$-\frac{1}{2\{1 + (1 + \triangle)\}}$$

so ergibt sich:

$$\frac{1 + \triangle}{1 + (1 + \triangle)}\, o^{2x} = \frac{o^{2x}}{2} = 0,$$

ausgenommen für $x = o$, wo man $\frac{1}{2}$ erhält. — Die Summen der Reihen mit ungeraden Potenzen lassen sich durch Bernoulli'sche Zahlen ausdrücken; denn setzt man $2x - 1$ für $n$, so erhält man wegen Nr. 9:

$$S = -\frac{1}{2+\triangle} o^{2x-1} = (-1)^{x+1} \cdot \frac{2^{2x}-1}{2x} B_{2x-1}.$$

(11.) Wenn man mit der Reihe:

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots x^n = S_x$$

ebenso verfährt, so findet man:

$$S_x = \{(1+\triangle) + (1+\triangle)^2 + \ldots (1+\triangle)^x\} o^n$$

$$= \frac{(1+\triangle)^{x+1} - (1+\triangle)}{\triangle} o^n$$

oder nach Potenzen von $\triangle$ entwickelt:

$$S_x = x \cdot o^n \frac{(x+1)x}{1.2} \triangle o^n + \frac{(x+1)x(x-1)\triangle^2 o^n}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(x+1)x\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots(n+1)} \triangle^n o^n.$$

Dieser Ausdruck für $S_x$ ist von den schon früher erhaltenen der Form nach verschieden, und man erhält diese, wenn man $(x+1)^n$ in vorhergehende statt in nachfolgende Factoren zerlegt und wie in Abschn. 2, Nr. 26 und Abschn. 6, Nr. 23 integrirt. —

(12.) Es soll die Summe der $x$ ersten Glieder der Reihe:

$$1^n - 2^n + 3^n - \&c.$$

gefunden werden. —

Auflösung. Hier ist:

$$S_n = \{(1+\triangle) - (1+\triangle)^2 + (1+\triangle)^3 \ldots$$

$$\pm (1+\triangle)^x\} o^n$$

$$= \frac{(1+\triangle) - (-1)^x (1+\triangle)^{x+1}}{2+\triangle} o^n.$$

Wird dieser Ausdruck nach Potenzen von $\triangle$ entwickelt, so erhält man eine zur Berechnung von $S_x$ geeignete Form, deren Gliederzahl nie größer als $n+1$ werden kann, so daß also die Entwickelung nicht weiter getrieben zu werden braucht. — So z. B. hat man:

$$1-2+3-\ldots\pm x=(-1)^{x+1}.\left(\frac{2x+1}{4}\right)+\frac{1}{4},$$

$$1^2-2^2+3^2-\ldots\pm x^2=(-1)^{x+1}.\frac{x(x+1)}{2}$$

$$1^3-2^3+3^3\ldots\pm x^3=$$

$$(-1)^{x+1}\,t\,\tfrac{1}{2}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8};\ \&c.$$

(13.) Wenn man die Reihe:

$$1^n.t+2^n.t^2+3^n.t^3+\&c.$$

ebenso behandelt, so findet man:

$$S_x=\{t(1+\triangle)+t^2(1+\triangle)^2+\ldots t^x(1+\triangle)^x\}o^n$$

$$=\frac{t^{x+1}(1+\triangle)^{x+1}-t(1+\triangle)}{t(1+\triangle)-1}o^n.$$

und:

$$S=\frac{t(1+\triangle)}{(1-t)-t\triangle}o^n=\left\{\frac{t}{1-t}+\frac{t\triangle}{(1-t)(1-t-t\triangle)}\right\}o^n$$

$$=\frac{t}{1-t}\left\{1+\frac{\triangle}{1-t}+\frac{t\triangle^2}{(1-t)^2}+\&c.\right\}o^n,$$

$$=\frac{1}{1-t}\left\{t.o^n+\left(\frac{t}{1-t}\right)\triangle o^n+\left(\frac{t}{1-t}\right)^2\triangle^2 o^n+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\left(\frac{t}{1-t}\right)^n\triangle^n o^n\right\}.$$

Specielle Fälle hiervon sind:

$$1 \,.\, t + 2 \,.\, t^2 + 3 \,.\, t^3 + \&c. = \frac{t}{(1-t)^2},$$

$$1^2 \,.\, t + 2^2 \,.\, t^2 + 3^2 \,.\, t^3 + \&c. = \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{2t^2}{(1-t)^3}.$$

Der Ausdruck für $S_x$ läßt sich wieder leicht nach Potenzen von $\triangle$ entwickeln, und nimmt dann eine zur Berechnung von $S_x$ geeignete Form an. —

(14.) Man soll den allgemeinen Summenausdruck $S$ der Reihe:

$$A_0 \,.\, o^n + A_1 \,.\, 1^n + A_2 \,.\, 2^n + \&c.$$

finden, wenn gegeben ist:

$$A_0 + A_1 \,.\, t + A_2 \,.\, t^2 + \&c. = F(t).$$

Behandelt man diese Reihe wie vorhin, so ergibt sich:

$$S = \{A_0 + A_1 (1 + \triangle) + \&c.\} o^n$$

$$= F(1 + \triangle)\, o^n$$

$$= F(1) \,.\, o^n + \frac{F'(1)}{1} \triangle\, o^n + \&c.$$

(15.) Man soll die unendliche Reihe:

$$S = 1^n + \frac{2^n \,.\, h}{1} + \frac{3^n \,.\, h^2}{1\,.\,2} + \frac{4^n \,.\, h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \&c.$$

summiren.

Aufl. Da diese Reihe identisch ist mit:

$$o^{n+1} + \frac{1^{n+1}}{1} h + \frac{2^{n+1}}{1\,.\,2} h^2 + \&c.$$

so erhält man, wenn man in der vorhergehenden Aufgabe $e^{ht}$ für $F(t)$ und $n + 1$ für $n$ setzt:

$$S = c^{h(1+\triangle)}\, o^{n+1}$$

$$= e^h \left\{ o^{n+1} + \frac{\Delta o^{n+1}}{1} h + \frac{\Delta^2 o^{n+1}}{1.2} h^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots \frac{\Delta^{n+1} o^{n+1}}{1\ldots(n+1)} h^{n+1} \right\}.$$

Für $h = 1$ folgt hieraus:

$$1 + \frac{2}{1} + \frac{3}{1.2} + \&c. = 2e,$$

$$1^2 + \frac{2^2}{1} + \frac{3^2}{1.2} + \&c. = 5e,$$

$$1^3 + \frac{2^3}{1} + \frac{3^3}{1.2} + \&c. = 15e. \ \&c.$$

(16) Für die Reihe:

$$1^n - 3^n + 5^n - \&c.$$

ist:

$$S = \frac{1+\Delta}{1+(1+\Delta)^2} o^n = \frac{1+\Delta}{2(1+\Delta)+\Delta^2} o^n.$$

Die Entwickelung dieses Ausdruckes nach Potenzen von $\Delta$ würde etwas umständlich sein; allein derselbe kann auf mancherlei verschiedene Weisen in eine endliche Anzahl berechenbarer Glieder eingeformt werden, wovon die folgende:

$$S = \left\{ \frac{1+\Delta}{2(1+\Delta)} - \frac{(1+\Delta)\Delta^2}{4(1+\Delta)^2} + \frac{(1+\Delta)\Delta^4}{8(1+\Delta)^3} - \&c. \right\} o^n.$$

$$= \frac{o^n}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^2}{1+\Delta} o^n + \frac{1}{8} \cdot \frac{\Delta^4}{(1+\Delta)^2} o^n - \&c.$$

die einfachste zu sein scheint, in der die Anzahl der Glieder nie größer als $\frac{n}{2} + 1$ werden kann, und jedes Glied sich leicht berechnen läßt. — In der That, wenn $n$ eine ungerade Zahl ist, so verschindet $S$; denn wenn man in der Gleichung ($a$) in Abschn. 7, Nr. 10 setzt:

$$f(1+\Delta) = \frac{1+\Delta}{1+(1+\Delta)^2},$$

so ergibt sich:

$$\frac{1+\Delta}{1+(1+\Delta)^2}\, o^{2x-1} = 0.$$

Ist dagegen $n$ ein gerade Zahl, und man setzt $2x$ für $n$, so erhält man:

$$S = \frac{o^{2x}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^2}{1+\Delta}\, o^{2x} + \ldots \pm \frac{1}{2^{x+1}} \cdot \frac{\Delta^{2x}}{(1+\Delta)^x}\, o^{2x};$$

und als specielle Fälle:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \&c. = \frac{1}{2}$$

$$1 - 3 + 5 - 7 + \&c. = 0,$$

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \&c. = -\frac{1}{2}$$

$$1^3 - 3^3 + 4^3 - 7^3 + \&c. = 0, \&c.$$

(17.) Man soll die Reihe:

$$\frac{1}{1^{2x+1}} - \frac{1}{3^{2x+1}} + \frac{1}{5^{2x+1}} - \&c.$$

ummiren, und die Summe in Bernoulli'schen Zahlen ausdrücken.

Auflösung. Es bezeichne $C_{2x+1}$ diese Summe, so daß:

$$C_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \&c.$$

$$C_3 = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \&c.$$

. . . . . . . . . . .

ist. — Alsdann hat man nach Euler:

$$\sec\theta = \frac{2^2}{\pi} \cdot C_1 + \frac{2^4}{\pi^3} C_3 \cdot \theta^2 + \frac{2^6}{\pi^5} C_5 \cdot \theta^4 + \&c.$$

so daß $C_{2x+1}$ dem Producte aus $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+1}$ und aus dem halben Coefficienten von $\theta^{2x}$ in der Reihe für $\sec\theta$ gleich ist. — Bezeichnet $A_{2x}$ diesen Coefficienten, so ist wegen:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{2}{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}},$$

nach Abschn. 7, Nr. 1:

$$A_{2x} = \frac{1}{1.2\ldots.(2x)} \times \frac{2}{(1+\Delta)^{\sqrt{-1}} + (1+\Delta)^{-\sqrt{-1}}}\, o^{2x}$$

und nach Abschn. 7, Nr. 8 ist, wenn $2x$ für $x$ und $\sqrt{-1}$ für $n$ gesetzt wird:

$$f\{(1+\Delta)^{\sqrt{-1}}\}\, o^{2x} = (\sqrt{-1})^{2x}.f(1+\Delta)o^{2x},$$
$$= (-1)^x.f(1+\Delta)\, o^{2x};$$

folglich:

$$A_{2x} = \frac{2.(-1)^x}{1.2\ldots(2x)} \times \frac{1}{(1+\Delta)+(1+\Delta)^{-1}}\, o^{2x}$$

Substituirt man diesen Werth von $A_{2x}$ in den von $C_{2x+1}$, so erhält man:

$$C_{2x+1} = \frac{(1-1)^x.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+1}}{1.2\ldots(2x)} \cdot \frac{1+\Delta}{(1+\Delta)^2+1}\, o^{2x}.$$

Der letzte Factor dieses Ausdruckes stimmt genau mit dem in der vorhergehenden Nr. für die Summe der Reihe:

$$1^{2x} - 3^{2x} + 5^{2x} - \&c.$$

gefundenen Ausdrücke überein, und der Zahlenwerth desselben kann leicht mittelst der dort angegebenen Formel gefunden werden. Man hat demnach zwischen den beiden Reihen die merkwürdige Relation:

$$1.2.3\ldots(2x) \times \left\{\frac{1}{1^{2x+1}} - \frac{1}{3^{2x+1}} + \frac{1}{5^{2x+1}} - \&c.\right\}$$
$$= (-1)^x.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+1} \times \{1^{2x} - 2^{2x} + 5^{2x} - \&c.\}$$

und als besondere Fälle:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{\&c.} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \text{\&c.} = \frac{\pi^3}{32}, \text{ \&c.}$$

Die Umsetzung in Bernoulli'sche Zahlen kann wie folgt geschehen. Es ist:

$$\frac{1+\Delta}{(1+\Delta)^2+1} = \frac{(1+\Delta)^2}{(1+\Delta)\{(1+\Delta)^2+1\}}$$

$$= \frac{1}{2(1+\Delta)}\left\{1 + \frac{(1+\Delta)^2-1}{(1+\Delta)^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2(1+\Delta)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+\Delta)-(1+\Delta)^{-1}}{(1+\Delta)^2+1}.$$

Nach Abschn. 7, Nr. 3 ist aber offenbar:

$$\frac{1}{1+\Delta}\, o^{2x} = 1,$$

und man hat daher:

$$\frac{1+\Delta}{(1+\Delta)^2+1}\, o^{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \frac{(1+\Delta)-(1+\Delta)^{-1}}{(1+\Delta)^2+1}\, o^{2x}.$$

$$= \frac{1}{2} + 2^{2x-1} \cdot \frac{(1+\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1+\Delta)^{-\frac{1}{2}}}{(1+\Delta)+1}\, o^{2x}$$

$$= \frac{1}{2} + 2^{2x-1} \cdot \frac{(1+\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1+\Delta)^{-\frac{1}{2}}}{2+\Delta}\, o^{2x}.$$

Aus dem Theoreme in Abschn. 7, Nr. 16 folgt aber, wenn $f(\Delta) = \frac{1}{2+\Delta}$ und successive $n = \pm \frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$\frac{(1+\Delta)^{\frac{1}{2}}}{2+\Delta}\, o^{2x} = \frac{4}{2+\Delta}\left(o + \frac{1}{2}\right)^{2x},$$

$$\frac{(1+\triangle)^{-\frac{1}{2}}}{2+\triangle}\,o^{2x}=\frac{2}{2+\triangle}\left(o-\frac{1}{2}\right)^{2x};$$

und endlich durch Substitution:

$$\frac{1+\triangle}{(1+\triangle)^2+1}\,o^{2x}=\frac{1}{2}+2^{2x-1}.\frac{1}{2+\triangle}\left\{\left(o+\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(o-\frac{1}{2}\right)^{2x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2^{2x-1}}{2+\triangle}\left\{\frac{2x}{1}\,o^{2x-1}+\frac{2x\,(2x-1)(2x-2)}{1.2.3\times 2^2}\,o^{2x-3}+\&c.\right\}.$$

Weiter ist nach Abschn. 8 Nr. 9:

$$\frac{1}{2+\triangle}\,o^{2x-1}=(-1)^x.\frac{2^{2x}-1}{2x}\,B_{2x-1};$$

folglich:

$$\frac{1}{2+\triangle}\,o^{2x-3}=-(-1)^x.\frac{2^{2x-2}-1}{2x-2}\,B_{2x-3};\ \&c.$$

Substituirt man diese Werthe, so verschwinden die Symbole $\triangle$, $o$ aus dem Ausdrucke und derselbe reducirt sich auf:

$$\frac{1}{2}+(-1)^x.2^{2x-1}\left\{\frac{2^{2x}-1}{1}\,B_{2x-1}\right.$$

$$\left.-\frac{2x\,(2x-1)}{1.2}.\frac{2^{2x-2}-1}{3.2^2}\,B_{2x-3}+\&c.\right\}$$

so daß man endlich hat:

$$C_{2x+1}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+1}}{1.2\ldots(2x)}\left\{\frac{(-1)^x}{2}\right.$$

$$+2^{2x-1}\left(\frac{2^{2x}-1}{1}\,B_{2x-1}-\frac{2x\,(2x-1)}{1.2}.\frac{2^{2x-2}-1}{3\times 2^2}\,B_{2x-3}+\right.$$

$$\left.\left.\ldots+\frac{2x\ldots.3}{1.2\ldots(2x-2)}.\frac{2^2-1}{(2x-1).2^{2x-2}}\,B_1\right)\right\}.$$

(18.) Wenn die Summe der Reihe:

$$A_0 + A_1 . t + A_2 . t^2 + \&c. = F(t)$$

oder die erzeugende Function von $A_x$ gegeben ist, die Summe der Reihe:

$$A_1 . 1^n . t + A_2 (1^n + 2^n) . t^2 + A_3 (1^n + 2^n + 3^n) t^3 + \&c.$$

oder die erzeugende Function von:

$$A_x . (1^n + 2^n + \ldots x^n)$$

zu finden. —

Auflösung. Wenn man für $1^n$, $2^n$, ... $x^n$ deren Werthe:

$$(1 + \Delta) o^n, \ (1 + \Delta)^2 o^n, \ldots (1 + \Delta)^x o^n$$

setzt, so ergibt sich wie in Nr. 11:

$$1^n + 2^n + \ldots x^n = \frac{(1 + \Delta)^{x+1} - (1 + \Delta)}{\Delta} o^n,$$

so daß die Reihe wird:

$$A_1 t . \frac{(1+\Delta)^2 - (1+\Delta)}{\Delta} o^n + A_2 t^2 . \frac{(1+\Delta)^3 - (1+\Delta)}{\Delta} o^n + \&c.$$

$$= \frac{1 + \Delta}{\Delta} \{ A_1 t (1+\Delta) + A_2 t^2 (1 + \Delta)^2 + \&c. \} o^n$$

$$- \frac{1 + \Delta}{\Delta} o^n . \{ A_1 t + A_2 t^2 + \&c. \}$$

$$= \frac{1 + \Delta}{\Delta} \{ F . (1 + \Delta) t - A_0 \} o^n - \frac{1 + \Delta}{\Delta} o^n \{ F(t) - A_0 \}$$

$$= \frac{1 + \Delta}{\Delta} \{ F(t + t \Delta) - F(t) \} o^n .$$

(19.) $$\frac{1^n}{1} + \frac{1^n + 2^n}{1.2} + \frac{1^n + 2^n + 3^n}{1.2.3} + \&c.$$

$$= e . (1 + \Delta) \frac{e^{\Delta} - 1}{\Delta} o^n = e \left\{ 1 + \frac{3}{1.2} \Delta + \frac{4}{1.2.3} \Delta^2 + \&c. \right\} o^n$$

$$= e\left\{o^n + \frac{3}{1.2}\Delta o^n + \frac{4}{1.2.3}\Delta^2 o^n + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{n+2}{1.2\ldots.(n+1)}\Delta^n o^n\right\}.$$

(20.) $1^n.t + (1^n + 2^n)t^2 + \ldots + (1^n + 2^n + 3^n)t^2.$

$$S = \frac{1+\Delta}{\Delta}\left\{\frac{t}{t - t - t\Delta} - \frac{t}{1-t}\right\}o^n$$

$$= \frac{t^2}{(1-t)^2}\left\{1 + \frac{\Delta}{(1-t) - t\Delta}\right\}o^n$$

$$= \frac{t}{(1-t)^2}\left\{t.o^n + \left(\frac{t}{1-t}\right)\Delta o^n + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2\Delta^2 o^n + \right.$$

$$\left. \ldots + \left(\frac{t}{1-t}\right)^n \Delta^n o^n\right\}.$$

(21.) Man soll den folgenden Ausdruck für die Bernoulli'schen Zahlen herleiten:

$$B_{2x-1} = (-1)^{r+1}.\left\{\frac{\Delta o^{2x+1}}{1^2} - \frac{\Delta^2 o^{2x+1}}{2^2} + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{\Delta^{2x+1} o^{2x+1}}{(2x+1)^2}\right\}.$$

Auflösung. Setzt man in der Gleichung:

$$\Sigma u_x = \int u_x\, dx - \frac{u_x}{2} + \frac{B_1}{1.2}.\frac{d}{dx}u_x - \&c.$$

$u_x = x^{2i}$, so ergibt sich für den Coefficienten von $x$ in der Entwickelung $\Sigma(x^{2i})$:

$$(-1)^{i+1} B_{2i-1}.$$

Aber wenn man den in Abschn. 2, Nr. 2 für $x^n$ gegebenen Ausdruck integrirt, so findet man:

$$\Sigma(x^n) = C + (-1)^n . \left\{ \frac{x}{1^2} \Delta o^{n+1} - \frac{x(x+1)}{1 . 2^2} \Delta^2 o^{n+1} + \&c. \right\}$$

Wenn man diesen Ausdrück nach Potenzen von $x$ entwickelt, und die Coefficienten von $x$ zusammenfaßt, so erhält man:

$$(-1)^n . \left\{ \frac{\Delta o^{n+1}}{1^2} - \frac{\Delta^2 o^{n+1}}{2^2} + \&c. \right\}$$

Setzt man hierin $2i$ für $n$, so ergibt sich durch Vergleichung des Resultates mit dem zuerst erhaltenen Coefficienten von $x$:

$$B_{2i-1} = (-1)^{i+1} \left\{ \frac{\Delta o^{2i+1}}{1^2} - \frac{\Delta^2 o^{2i+1}}{2^2} + \&c. \right\}$$

welches in der That die gesuchte Relation ist. — Wenn $2i - 1$ für $n$ gesetzt wird, so verschwindet das Glied mit $x$ aus dem Integrale $\Sigma(x^n)$, so daß man die Gleichung:

$$\frac{\Delta o^{2i}}{1^2} - \frac{\Delta^2 o^{2i}}{2^2} + \&c. = 0,$$

haben muß, welche bereits in Abschn. 7, Nr. 13 auf einem anderen Wege erhalten wurde. — Wir wollen nun noch eine Eigenschaft der in der Form $\Delta^m o^n$ enthaltenen Zahlen mittheilen, vermittelst welcher sich die Tafel in Abschn. 1. Nr. 32 leicht beliebig weit ausdehnen läßt. —

(22.) Man soll zeigen, daß die Zahlen:

$$\Delta^n o^n, \ \Delta^n o^{n+1}, \ \Delta^n o^{n+2}, \ \&c.$$

eine recurrirende Reihe bilden, und die Relationsscale derselben finden. —

Auflösung. Wegen:

$$\Delta^n o^x = n^x - \frac{n}{1}(n-1)^x + \ldots . \pm \frac{n}{1} . 1^x,$$

ist diese Function von der Form:

$$C_1 . \alpha^x + C_2 . \beta^x + \ldots . C_n v.^x,$$

ist also ein particuläres Integral irgend einer Differenzengleichung des ersten Grades mit constanten Coefficienten, also das allgemeine Glied irgend einer recurrirenden Reihe. — Nun sei:

$$A_0 = 1,$$

$$A_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots . n,$$

$$A_2 = 1 . 2 + 1 . 3 + 2 . 3 + \ldots (n-1) . n$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$A_n = 1 . 2 . 3 \ldots . n,$$

so ist diese Gleichung:

$$\triangle^n o^{x+n} - A_1 \triangle^n o^{x+n-1} + \ldots . \pm A_n \triangle^n o^x = 0$$

und die Relationsscale:

$$+ A_1, - A_2, + A_3, \ldots . \pm A_n .$$

# Neunter Abschnitt.

## Aufgaben zur Interpolation von Reihen.

(1.) Wenn eine Reihe successiver gleichentfernter Werthe, unter welchen aber einer fehlt, gegeben sind, diesen einen zu finden.

Auflösung. Es seien:

$$v_0, v_1, v_2, \ldots . v_n,$$

die gegebenen Werthe und $v_i$ der fehlende. Man setze $\triangle^n v_0 = 0$, so daß die $(n-1)^{ten}$ Differenzen constant werden, was gewöhnlich bei den in Tafeln enthaltenen Werthen der Fall ist; so hat man die Gleichung:

$$\triangle^n v_0 = v_n - \frac{n}{1} v_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} v_{n-2} \ldots \pm \frac{n}{1} v_1 \mp v_0 = 0,$$

welche vom ersten Grade ist, und woraus sich irgend einer der Werthe, wie $v_i$ als Function der übrigen ergibt. —

(2.) Wenn zwei Werthe $v_0$, $v_2$ einer Function gegeben sind, einen dritten, von jenen gleichweit abstehenden Werth $v_1$ zu finden.

Auflösung. Man setze $\triangle^2 v_0 = 0$, so ist:

$$v_2 - 2v_1 + v_0 = 0,$$

also:

$$v_1 = \frac{v_0 + v_2}{2}.$$

(3.) Für drei gegebene Werthe $v_0$, $v_1$, $v_3$ und einen fehlenden Werth $v_2$ hat man:

$$\triangle^3 v_0 = 0; \; v_3 - 3v_2 + 3v_1 - v_0 = 0,$$

$$v_2 = \frac{v_3 + 3v_1 - v_0}{3},$$

und wenn $v_1$ der fehlende Werth wäre; so hätte man:

$$v_1 = \frac{v_0 + 3v_2 - v_3}{3}.$$

(4.) Wenn gegeben sind:

$$\log 510 = 2.70757018$$

$$\log 511 = 2.70842090$$

$$\log 513 = 2.71011737$$

$$\log 514 = 2.71096312$$

den Werth von log 512 zu finden. — Hier ist:

$v_0 = \log 510$, $v_1 = \log 511$, $v_3 = \log 513$, und $v_4 = \log 514$ gegeben und $v_2 = \log 512$ wird gesucht. — Man hat:

$$\Delta^4 v_0 = v_4 - 4v_3 + 6v_2 + 4v_1 + v_0 = 0,$$

also: $$v_2 = \frac{4(v_1 + v_3) - (v_0 + v_4)}{6} = 2.70926996$$

genau wie in der Logarithmentafel. —

(5.) Wenn in einer Reihe successiver äquidistanter Werthe:

$$v_0, v_1, \ldots v_{n+1} \qquad (\alpha)$$

einer Function zwei derselben fehlen, diese zu finden. —

Auflösung. Setzt man $\Delta^n v_0 = 0$ und $\Delta^n v_1 = 0$, so erhält man die beiden Gleichungen des ersten Grades:

$$\left.\begin{aligned} v_n - \frac{n}{1} v_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} v_{n-2} \ldots \pm v_0 = 0 \\ v_{n+1} - \frac{n}{1} v_n + \frac{n(n-1)}{1.2} v_{n-1} \ldots \pm v_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

woraus sich irgend zwei der Werthe ($\alpha$) als Functionen der übrigen ergeben. — Wenn mehr als zwei Werthe fehlen, so verfährt man auf ähnliche Weise.

(6.) Wenn die Werthe $v_0$, $v_1$, $v_4$, $v_5$ gegeben sind, die beiden Werthe $v_2$, $v_3$ zu finden.

Man setze $\Delta^n v_0 = 0$ und $\Delta^n v_1 = 0$, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} v_4 - 4v_3 + 6v_2 - 4v_1 + v_0 = 0, \\ v_5 - 4v_4 + 6v_3 - 4v_2 + v_1 = 0, \end{array}\right\}$$

woraus folgt:

$$v_2 = \frac{-3v_0 + 10v_1 + 5v_4 - 2v_5}{10}$$

$$v_3 = \frac{-2v_0 + 5v_1 + 10v_4 - 3v_5}{10}.$$

(7) Für die folgenden vier Werthe von $a$ sind die vier danebenstehenden Werthe des Integrales:

$$\int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{a-1}$$

gegeben

$$\begin{aligned} a &= 1.326, & v_0 &= 0.8938710; \\ & 1.328, & v_2 &= 0.8936220; \\ & 1.329, & v_3 &= 0.8935004; \\ & 1.331, & v_5 &= 0.8932628; \end{aligned}$$

man soll die $a = 1.327$, und $a = 1.330$ entsprechenden Werthe $v_1$ und $v_4$ dieses Integrales finden. — Hier ist:

$$v_1 = \frac{v_5 - 10v_3 + 20v_2 + 4v_0}{15} = 0.8937455$$

$$v_4 = \frac{4v_5 + 20v_3 - 10v_2 + v_0}{15} = 0.8933807.$$

(8.) In eine Reihe successiver äquidistanter Werthe einer Function, worin einer, oder mehrere fehlen, einen beliebigen zwischenliegenden Werth einzuschalten. —

Auflösung. Man suche zunächst die fehlenden Werthe und interpolire dann die vollständige Reihe mittelst der Formel:

$$v_n = v_0 + \frac{n}{1}\Delta v_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 v_0 + \&c.$$

(9.) Für die Function $\tan^{-1}(x) = \text{arctang}\, x$ sind folgende Werthe gegeben:

$$\tan^{-1} 10 = 1.471127674,\ \tan^{-1} 11 = 1.480136439$$

$$\tan^{-1} 13 = 1.494024435,\ \tan^{-1} 15 = 1.504228163,$$

und es wird gesucht $\tan^{-1}(11.63)$.

Zuerst sucht man die Werthe von $\tan^{-1}(12)$ und $\tan^{-1}(14)$, wofür man resp. findet:

$$1.487655094;\ 1.499488856.$$

Setzt man dann:

$$n = 1.63,\ v_0 = \tan^{-1} 10,\ \&c.$$

so ergibt sich für den gesuchten Werth:

$$v_n = 1.485022707$$

(10.) Wenn die Werthe $v_0$, $v_1$, $v_3$ einer Function gegeben sind, irgend einen gegebenen Werth $v_n$ einzuschalten. —

Auflösung. Man hat:

$$v_n = v_0 - \frac{v_3 - 9v_1 + 8v_0}{6}.n + \frac{v_3 - 3v_1 + 2v_0}{6}.n^2.$$

(11.) Zwei in einem Zeitintervalle von 1 Tag gemachte Beobachtungen einer Größe haben resp. die Werthe $a$ und $-b$ gegeben; wann war ihr Werth $= 0$?

Auflösung. Es ist $v_0$ und $v_1$ gegeben und $n$ so zu bestimmen, daß $v_n = 0$ wird. — Nun ist allgemein:

$$v_n = v_0 + \frac{n}{1}(v_1 - v_0)$$

und dies $= 0$ gesetzt, gibt für die als Bruch eines Tages von dem

Moment der ersten Beobachtung an gezählte Zeit bis zu dem Moment, wo die fragliche Größe $=0$ ist:

$$n = -\frac{v_0}{v_1 - v_0} = \frac{a}{a+b},$$

Hat man nur zwei Beobachtungen, so setzt man $\triangle^2 v_0 = 0 \ldots\ldots$ welches der gewöhnlichste Fall der Interpolation ist — und um die größte Genauigkeit zu erreichen, macht man die Beobachtungen unter solchen Umständen, daß man $\triangle^2 v_0, \ldots = 0$ setzen darf, d. h. wenn sich die beobachtete Größe nahezu gleichförmig ändert — was z. B. mit der Declination der Sonne in der Nähe der Aequinoction, mit der Breite eines Planeten in der Nähe der Knoten, ꝛc. der Fall ist. — Auch die gewöhnliche Regel der Proportionaltheile bei logarithmischen und andern Tafeln hat hierin ihren Grund. —

(12) Drei in gleichen Zeitintervallen gemachte Beobachtungen einer Größe haben die Werthe $v_0$, $v_1$, $v_2$ gegeben, zwischen welchen ihr wahrer Werth $a$ liegt — wann hat letzterer stattgefunden? —

Auflösung. Es muß $n$ wieder so bestimmt werden, daß $v_n = a$ wird, so daß man hat:

$$v_0 + \frac{n}{1} \triangle v_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \triangle^2 v_0 = a,$$

woraus folgt:

$$n = \frac{1}{2\triangle^2 v_0} \left\{ (\triangle^2 v_0 - 2\triangle v_0) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(\triangle^2 v_0 - 2\triangle v_0)^2 - 8(v_0 - a)\triangle^2 v_0} \right\}.$$

Die Wurzelgröße muß mit dem positiven Zeichen genommen werden, weil die Annahme $\triangle^2 v_0 = 0$ oder $=$ einer sehr kleinen Größe den Werth von $n$ auf den in der letzten Nr. reduciren muß. Wird dieser Ausdruck noch Potenzen von $\triangle^2 v_0$ entwickelt und werden die höhern Potenzen als die erste vernachlässigt; so ergibt sich:

$$n = -\left(\frac{1}{\Delta v_0} + \frac{(v_1 - a)\,\Delta^2 v_0}{2\,(\Delta v_0)^3}\right).(v_0 - a)$$

worin das Glied:

$$-(v_0 - a).(v_1 - a).\ \frac{\Delta^2 v_0}{2\,(\Delta v_0)^3},$$

als eine an dem Werthe von $n$ anzubringende Correction betrachtet werden kann, wenn dieser Werth blos nach $v_0$ und $v_1$ in der Voraussetzung $\Delta^n v_0 = 0$ berechnet ist. — Auch ist zu bemerken, daß durch eine schickliche Wahl der Größen $v_0, v_1, \ldots$ immer $a=0$ gemacht werden kann, so daß man für die anzubringende Correction in diesem Falle hat:

$$-\frac{v_0 \,.\, v_1 \,.\, \Delta^2 v_0}{2\,(\Delta v_0)^3}.$$

(13.) Wenn drei nicht äquidistante Werthe $v_\alpha$, $v_\beta$, $v_\gamma$ einer Function gegeben sind, einen beliebigen Zwischenwerth $v_n$ einzuschalten. —

Auflösung. Wir wollen annehmen, daß die Indices $\alpha, \beta, \gamma$ äquidistante Werthe irgend einer andern Function sind, so daß $\alpha = z_0$, $\beta = z_1$, $\gamma = z_2$ und $n = z_x$ ist. Alsdann sind $v_\alpha$, $v_\beta$, $v_\gamma$, $v_n$ die Werthe der Function $v_{z_x}$, welche den Werthen 0, 1, 2 und $x$ des Index $x$ entsprechen. — Nun sei $v_{z_x} = u_x$, so ist $u_0 = v_\alpha$, $u_1 = v_\beta$, $u_2 = v_\gamma$, $u_x = v_n$, und die Lagrange'sche Interpolationsformel gibt:

$$u_x \text{ oder } v_n = \frac{(n-\beta)(n-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\,v_\alpha + \frac{(n-\alpha)(n-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\,v_\beta + $$

$$+ \frac{(n-\alpha)(n-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\,v_\gamma.$$

(14.) Eine Größe ist in der Nähe ihres Maximums- oder Minimumsstandes in gleichen, oder ungleichen Zwischenzeiten dreimal beobachtet; man soll aus den beobachteten Werthen derselben die Zeit ihres Maximums- oder Minimumsstandes bestimmen. —

Auflösung. Es seien $\alpha, \beta, \gamma$ die von einem bestimmten Mo-

mente an gezählten Beobachtungszeiten und $v_\alpha$, $v_\beta$, $v_\gamma$ der beobachteten Werthe; so wird für irgend eine andere Zeit $n$ der Werth von $v_n$ durch die obige Formel ausgedrückt. — Differenzirt man diesen Werth nach $n$ und setzt das Resultat $= 0$, so ergibt sich:

$$n = \frac{(\beta^2 - \gamma^2)\, v_\alpha - (\alpha^2 - \gamma^2)\, v_\beta + (\alpha^2 - \beta^2)\, v_\gamma}{2\,\{(\beta - \gamma)\, v_\alpha - (\alpha - \gamma)\, v_\beta + (\alpha - \beta)\, v_\gamma\}},$$

für die Zeit $n$, zu welcher $v_n$ ein Maximum, oder Minimum ist. Nach dieser letzten Formel kann z. B. die Meridianhöhe der Sonne oder eines Sternes bestimmt werden, wenn die Beobachtung im Meridian selbst nicht möglich ist. —

Wenn die Beobachtungen in gleichen Zwischenzeiten gemacht sind, und die Zeiten von dem Moment der ersten Beobachtung an gezählt werden; so ist:

$$n = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{3v_\alpha - 4v_\beta + v_\gamma}{2v_\alpha - 2v_\beta + v_\gamma}.$$

(15.) Es sind eine beliebige Auzahl in nicht gleichen Zwischenzeiten gefundener Beobachtungswerthe einer Größe gegeben, man soll den Werth dieser Größe, sowie die Differentialquotienten desselben für einen gegebenen Moment bestimmen, wenn die Zeit als gleichförmig verfließend angenommen wird. —

Auflösung. Es sei $t$ die von einer beliebigen Epoche an gezählte Zeit des gegebenen Momentes, so daß $t$ die unabhängige Veränderliche ist, welche negative Werthe hat für alle Beobachtungszeiten vor der bestimmten Epoche. — Ferner seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Werthe von $t$ in den Beobachtungsmomenten, und $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \ldots$ die der beobachteten Größe; so ist ihr Werth $v$ zur Zeit $t$:

$$v = \frac{(t-\beta)\,(t-\gamma)\ldots}{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\ldots}\, v_\alpha + \frac{(t-\alpha)\,(t-\gamma)\ldots}{(\beta-\alpha)\,(\beta-\gamma)\ldots}\, v_\beta + \&c.$$

Die Werthe von $(v)_0, \left(\frac{dv}{dt}\right)_0, \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_0, \ldots$ d. h. die Werthe von $v$ und seiner Differenzialquotienten für $t = 0$ sind offenbar die resp. mit 1, 1 . 2, 1 . 2 . 3, ... dividirten Coefficienten von $t^0$,

$t^1$, $t^2$, $t^3$, ... in der Entwickelung dieser Function; nämlich:

$$(v)_0 = \pm \left\{ \frac{\beta.\gamma.\delta\ldots}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots} v_\alpha + \frac{\alpha.\gamma.\delta\ldots}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots} v_\beta + \&c. \right\}$$

$$1.\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = \mp \left\{ \frac{\beta.\gamma.\delta\ldots\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\ldots\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots} v_\alpha + \&c. \right\}$$

$$1.2.\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_0 = \pm \left\{ \frac{\beta.\gamma.\delta\ldots.\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\delta}+\frac{1}{\gamma\delta}+\ldots\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots} v_\alpha + \&c. \right\}$$

&c. &c.

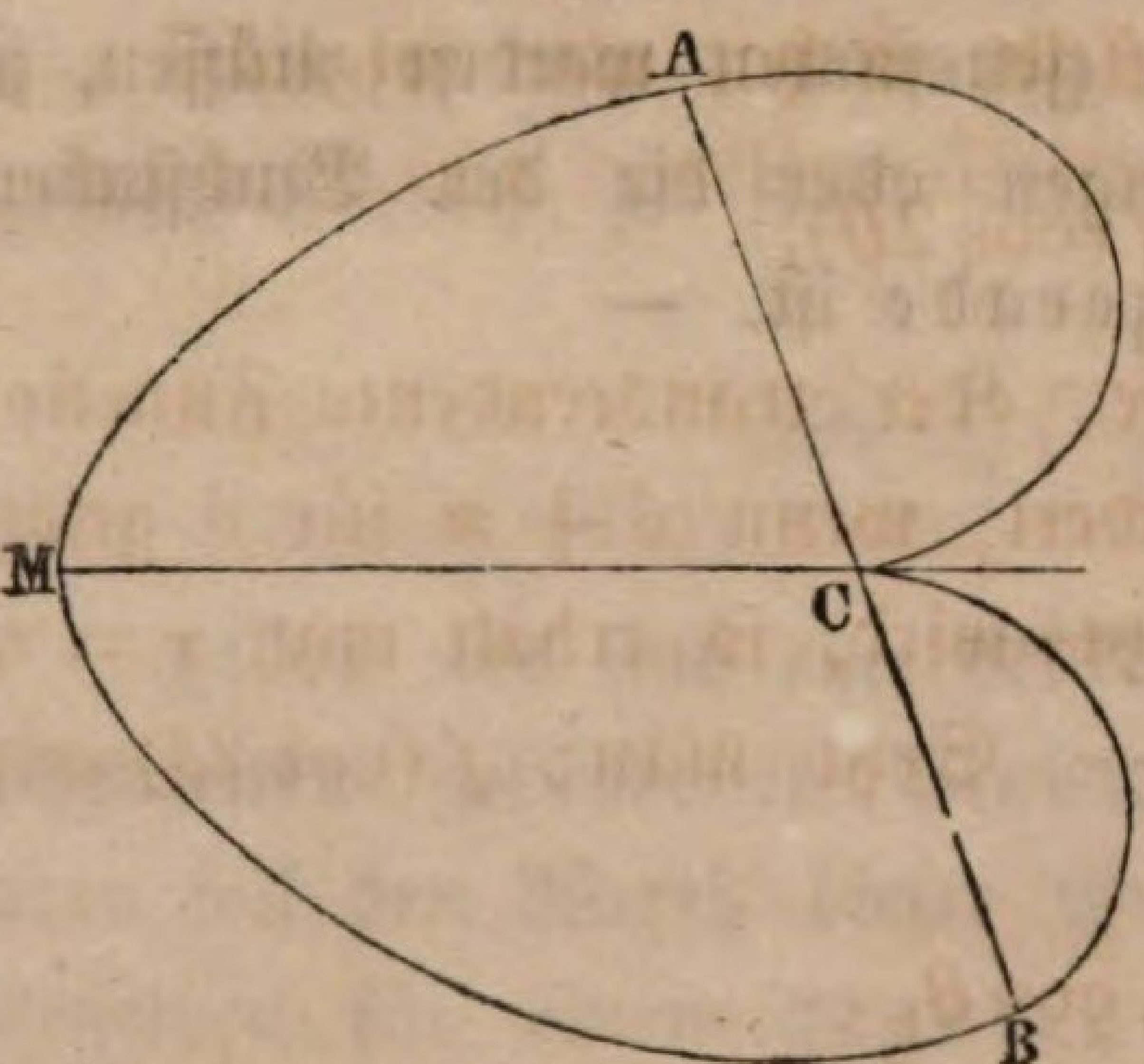
wo die obern oder untern Zeichen genommen werden müssen, je nachdem die Anzahl der Beobachtungen oder die der Buchstaben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... eine ungerade, oder gerade ist. —

# Zehnter Abschnitt.

## Geometrische Anwendungen der Differenzenrechnung.

(1.) Man soll untersuchen: ob es außer dem Kreise noch andere Curven gibt, deren Durchmesser alle von derselben Länge sind — und wenn dies der Fall ist, die allgemeine Gleichung derselben zu finden. —

Fig. 1.




Es sei $\angle MCA = \theta$, $CA = r$, $CB = r'$ und $r = \varphi(\theta)$ sei die Polargleichung der gesuchten Curven, so ist $r' = \varphi(\theta + \pi)$, und da $r + r' = \text{const.} = 2a$ sein soll; so hat man zur Bestimmung der Form der Function $\varphi$ folgende Gleichung:

$$\varphi(\theta) + \varphi(\theta + \pi) = 2a.$$

Setzt man nun:

$$z = \frac{\theta}{\pi}, \text{ oder } \theta = \pi z,$$

so wird diese Gleichung:

$$\varphi(\pi z) + \varphi\{\pi.(z+1)\} = 2a,$$

welches eine Differenzengleichung ist; denn setzt man $\varphi(\pi z) = u_z$, so ist:

$$\varphi\{\pi.(z+1)\} = u_{z+1},$$

und:

$$u_z + u_{z+1} = 2a.$$

Dieser Gleichung ohne den zweiten Theil, d. h. der Gleichung:

$$u_z + u_{z+1} = 0$$

wird aber offenbar durch $\cos \pi z$ genügt, weil:

$$\cos \pi z + \cos \pi (z + 1) = 0$$

ist. — Das vollständige Integral ist also:

$$u_z = a + C . \cos \pi z,$$

wo $C$ eine willkürliche Constante, oder vielmehr eine willkürliche Function von $\cos 2\pi z$ ist, oder überhaupt eine Größe, deren Werth sich nicht ändert, wenn man $z + 1$ für $z$ setzt. — Wird die ursprüngliche Bezeichnung wieder hergestellt, so hat man folglich:

$$r = a + \cos \theta . f(\cos 2\theta),$$

wo $f(\cos 2\theta)$ irgend eine algebraische, oder transcendente Function von $\theta$ bedeutet, welche sich nicht ändert, wenn $\theta + \pi$ für $\theta$ gesetzt wird. — Wenn $f(\cos 2\theta) = 0$ gesetzt wird, so erhält man $r = a$, d. h. die Gleichung des Kreises. — Setzt man: $f(\cos 2\theta) = b$ so hat man:

$$r = a + b . \cos \theta,$$

wodurch eine Curve wie die in Fig. 1 angegebene ausgedrückt wird, deren algebraische Gleichung ist:

$$(x^2 - bx + y^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2).$$

(2.) Man soll die allgemeine Gleichung der Curven finden, worin nicht die Summe $r + r' = AC + CB$, sondern das Product $rr' =$ const. ist, so daß man hat:

$$rr' = a^2, \text{ oder } \varphi(\theta) . \varphi(\pi + \theta) = a^2$$

oder wenn man $\theta = \pi z$ und $\varphi(\theta) = u_z$ setzt:

$$u_z . u_{z+1} = a^2,$$

welcher Differenzengleichung offenbar durch:

$$u_z = a . C^{\cos \pi z},$$

genügt wird, weil:

$$\cos \pi (z + 1) = - \cos \pi z$$

ist. — Dies ist das vollständige Integral, wenn $C$ eine arbiträre Function von $\cos 2\pi z$ bedeutet; also wenn für $z$ sein Werth wieder eingeführt wird:

$$r = \varphi(\theta) = a \,.\, f(\cos 2\theta)^{\cos\theta}.$$

Die durch die Gleichung:

$$r = ae^{\cos\theta}$$

ausgedrückte ovale Curve genügt also der gemachten Bedingung.

Es gibt aber auch noch unendlich viele andere algebraische Curven, welche derselben Bedingung genügen, wie noch gezeigt werden soll. —

Nach dem Obigen ist $f(\cos 2\theta)$ irgend eine Function, welche nicht geändert wird, wenn man $\pi + \theta$ für $\theta$ setzt. — Wenn nun $F(\cos 2\theta)$ eine andere solche Function ist, so ist klar, daß der Ausdruck:

$$\frac{F(\cos 2\theta) + \cos\theta}{F(\cos 2\theta) - \cos\theta},$$

durch diese Substitution wegen $\cos(\pi + \theta) = - \cos\theta$ umgekehrt wird, weil der Zähler in den Nenner, und umgekehrt, übergeht. Man darf also für $f(\cos 2\theta)$ die Form:

$$\left\{\frac{F(\cos 2\theta) + \cos\theta}{F(\cos 2\theta) - \cos\theta}\right\}^{\frac{n}{\cos\theta}}$$

setzen, weil $\cos\theta$ durch die erwähnte Substitution blos das Zeichen ändert — und wenn dieser Ausdruck für $f(\cos 2\theta)$ in den von $r$ gesetzt wird; so erhält man:

$$r = a\left\{\frac{F(\cos 2\theta) + \cos\theta}{F(\cos 2\theta) - \cos\theta}\right\}^{n}$$

welches stets algebraische Curven gibt, wenn $F$ eine algebraische

Function ist. — Setzt man z. B.: $F(\cos 2\theta) = 1, n = -\frac{m}{2}$, so erhält man als Gleichung der Curve:

$$r = a.(\tan \tfrac{1}{2}\theta)^m$$

Setzt man:

$$F(\cos 2\theta) = \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 . \sin \theta^2)}}{\beta},$$

welcher Ausdruck durch die Substitution von $\pi + \theta$ für $\theta$ nicht geändert wird; so ergibt sich:

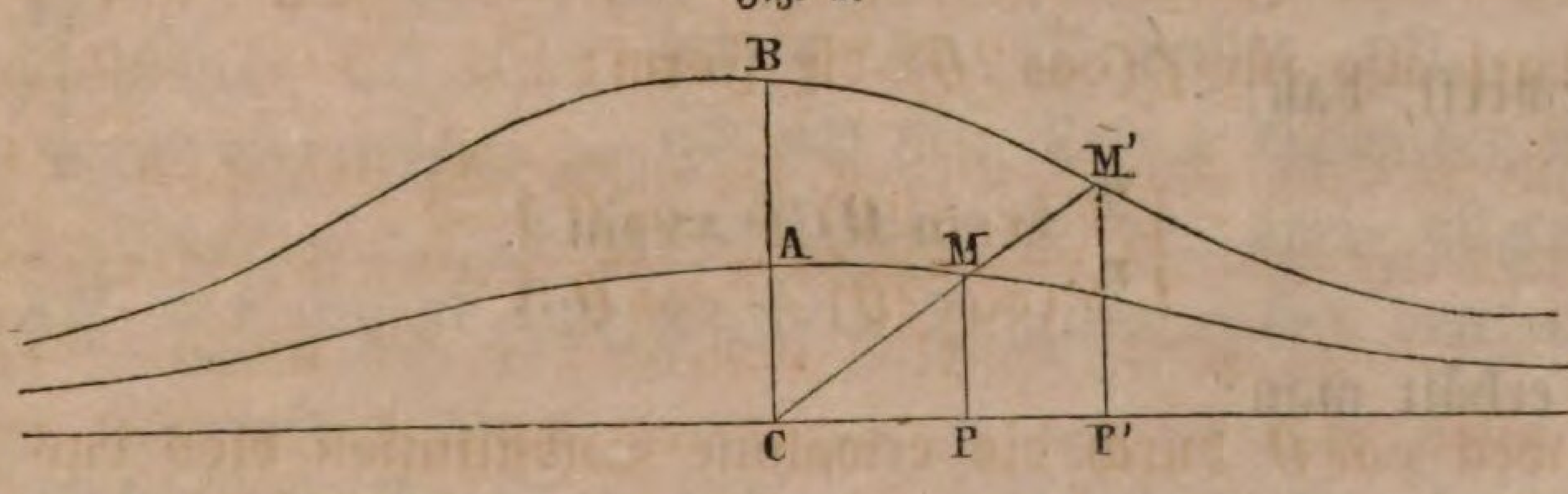
$$r = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}} \{\beta . \cos \theta + \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 . \sin \theta^2)}\}$$

welches die Gleichung des Kreises ist, indem der Pol eine beliebige Lage hat. —

(3.) Wenn sich eine gerade Linie um einen festen Pol drehet, indem ihr einer Endpunkt sich auf einer andern Geraden fortbewegt; so beschreibt ihr anderer Endpunkt bekanntlich eine Conchoide Man soll nun die allgemeine Gleichung aller der Curven finden, welche auf ähnliche Weise, wie die Conchoide erzeugt werden, nur mit dem Unterschiede: daß die Directrix keine Gerade, sondern ein anderer Zweig der gesuchten Curve selbst ist. —

Es sei $C$ der feste Punkt, um welchen sich die Gerade $MM'$

Fig. 2.




von der constanten Länge $= \alpha$ drehet, und:

$$CM = r,\ CM' = r',\ CP = x,\ PM = y,\ CP' = x',\ CM' = y',$$

so ist:

$$r' - r = a, \text{ oder } r' = a + r.$$

Nun sei:

$$y = \varphi\sqrt{(x^2 + y^2)} = \varphi(r)$$

die Gleichung der Curve, so muß auch $y' = \varphi(r')$ sein, weil dieselbe Gleichung beiden Curvenzweigen gemeinschaftlich ist. — Die ähnlichen Dreiecke $CPM$, $CP'M'$ geben ferner:

$$y' = y \cdot \frac{r'}{r},$$

und folglich ist:

$$\frac{\varphi(r')}{r'} = \frac{\varphi(r)}{r}, \text{ oder } \frac{\varphi(a+r)}{a+r} = \frac{\varphi(r)}{r},$$

aus welcher Gleichung die Form der Function $\varphi$ bestimmt werden muß. — Es sei $r = az$, also $a + r = a(z + 1)$, und: $\frac{\varphi(az)}{az} = u_z$, so ist:

$$u_{z+1} = u_z,$$

also:

$$u_z = f \cos 2\pi z,$$

und mithin:

$$\frac{y}{r} = f\left(\cos 2\pi \cdot \frac{r}{a}\right).$$

Setzt man:

$$f\left(\cos 2\pi \frac{r}{a}\right) = \sin 2\pi \frac{r}{a},$$

und bemerkt, daß:

$$\frac{y}{r} = \sin MCP = \sin\theta,$$

ist; so erhält man:

$$\sin\theta = \sin 2\pi \frac{r}{a}, \text{ oder } r = a \cdot \frac{\theta}{2\pi},$$

die Gleichung der Archimedischen Spirale, worin die nächstuntere Windung als der andere Curvenzweig zu betrachten ist. — In der That ist in dem Obigen nicht die Bedingung in Rechnung gebracht: daß die Punkte $M$ und $M'$ auf verschiedenen Curvenzweigen lie-

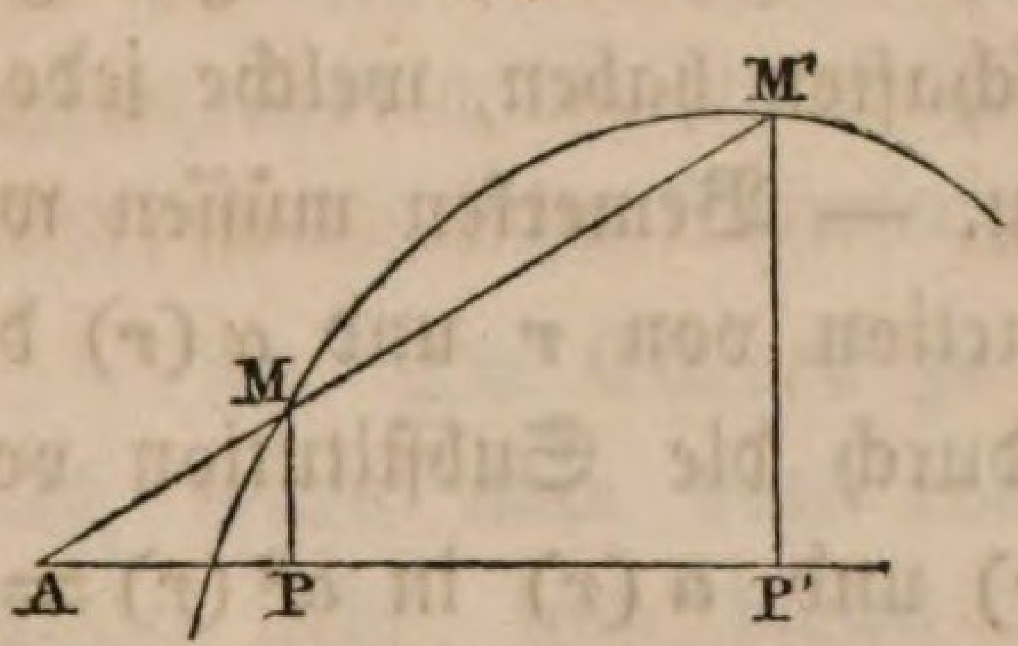
gen sollen, was aber auf folgende Weise geschehen kann: Wenn $CM$ als ein negativer Werth von $r$ betrachtet wird, welcher einer halben Umdrehung mehr von $CM$ entspricht; so wird die geometrische Bedingung $r - r' = 2a$ analytisch durch $\varphi(\theta) + \varphi(\pi + \theta) = 2a$ ausgedrückt, und entspricht der Aufgabe (1), wenn man nur solche Curven nimmt, welche die verlangte Eigenschaft haben. — Wenn z. B. in:

$$r = a + \cos\theta \,.\, f(\cos 2\theta),$$

der Winkel $\theta < \pi$ ist, so muß $r$ positiv sein, und für $\theta > \pi$ dagegen negativ, oder wenigstens wenn in einem Theile des Intervalles von 0 bis $\pi$, $r$ negativ wird; so muß um so mehr $r$ in dem entsprechenden Theile des Intervalles von $\pi$ bis $2\pi$ negativ sein. — Eine solche Curve ist:

$$r = a\left(1 + \frac{1}{\sin\theta}\right), \text{ oder } (x^2 + y^2)(y - a)^2 = a^2 y^2;$$

und es gibt unendlich viele algebraische Curven, worin zwei Zweige der Eigenschaft $r + r' = 2a$ und zugleich zwei andere Zweige der Eigenschaft $r' - r = 2a$ entsprechen. —




(4) Man soll die Natur der Curve $AMM'$ untersuchen, welche so beschaffen ist, daß die Summe der $m^{ten}$ Potenzen der Abschnitte $AM$, $AM'$ des sich um den Pol $A$ drehenden Vectors constant ist — oder allgemeiner: worin $AM' = r'$ irgend eine gegebene Function $\alpha(r)$ von $AM = r$ ist. —

Auflösung. Es sei wieder $y = \varphi(r)$, so muß auch $y' = \varphi(r)$ sein. Da nun $r' = \alpha(r)$ und $\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r}$ ist; so hat man zur Bestimmung der Form der Function $\varphi$ die Gleichung:

$$\frac{\varphi\alpha(r)}{\alpha(r)} = \frac{\varphi(r)}{r},$$

Nun ist aber klar, daß, wenn irgend eine Function $f(r)$ gefunden werden kann, welche sich durch die Substitution von $\alpha(r)$ für $r$ nicht ändert, die Gleichung:

$$\frac{\varphi(r)}{r} = f(r), \text{ oder } \varphi(r) = r \,.\, f(r)$$

der vorhergehenden genügt. — Die Laplace'sche Methode gibt eine allgemeine Auflösung der Gleichung:

$$f\{\alpha(r)\} = f(r),$$

also auch die vollständige Auflösung der allgemeinen Form der Aufgabe. — In dem besondern Falle:

$$r^m + r'^m = a^m$$

hat man:

$$r' = \alpha(r) = \sqrt[m]{(a^m - r^m)},$$

also:

$$\alpha(r') = \alpha\,\alpha(r) = \alpha^2(r) = \sqrt[m]{a^m - (a^m - r^m)} = r.$$

Die fragliche Function ist mithin eine s. g. periodische, d. h. eine solche, welche den Gleichungen $\alpha^2(r) = r$, $\alpha^3(r) = r$, &c. genügen und viele elegante und brauchbare Eigenschaften haben, welche jedoch hier nicht näher angeführt werden können. — Bemerken müssen wir aber noch, daß jede symmetrische Function von $r$ und $\alpha(r)$ die gewünschte Eigenschaft hat, d. h. sich durch die Substitution von $\alpha(r)$ für $r$ nicht ändert, weil $r$ in $\alpha(r)$ und $\alpha(r)$ in $\alpha^2(r) = r$ übergeht, diese Größen also in Folge der fraglichen Substitution blos ihre Plätze vertauschen, wodurch der Werth der Function nicht geändert wird, weil sie auf gleiche Weise darin vorkommen. — Setzt man z. B.:

$$f(r) = \frac{r}{b^2}\,\alpha(r) = r \,.\, \frac{\sqrt[m]{(a^m - r^m)}}{b^2},$$

so findet man:

$$b^2 y = r^2 \,.\, \sqrt[m]{(a^m - r^m)}.$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß die Gleichungen:

$$b.\left(\frac{y}{r}\right)^n = r + \sqrt[m]{(a^m - r^m)},$$

und:

$$by = a^m\, r^{m+1} - r^{2m+1}, \text{ \&c.}$$

der Bedingung der Aufgabe genügen.

Die Fälle: $r + r' = a$, $r^m + r'^m = a^m$, $r^2 r' = a^3$ sind schon von Joh. Bernoulli betrachtet, gleichzeitig mit dem berühmten Probleme der Brachistochrone; allein weder Bernoulli, noch die vielen großen Geometer, welche Auflösungen gaben, scheinen die wahre Schwierigkeit, nämlich die Auflösung von Functionalgleichungen, erkannt zu haben. — Bernoulli's Absicht war hauptsächlich: die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf einen Fall zu leiten, wo die Methoden Descartes, die Bedingungen einer geometrischen Aufgabe in Gleichungen auszudrücken, unbrauchbar werden — und selbst die Differentialrechnung keine Hülfe leistet. — Leibniz, L'Hopital, Newton und Jac. Bernoulli, welche alle die Aufgabe lösten, begnügten sich mit der sich von selbst darbietenden ersten particulären Form der unbekannten Function, ohne ein directes Verfahren zur Auflösung der Functionalgleichung zu suchen, worin bei etwas complicirtern Fällen allein die zu überwindende analytische Schwierigkeit besteht. —

(5.) Die Curven zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben: daß, wenn man von einem festen Punkte $n$ Gerade bis an die Curve zieht, und dieses System von Geraden sich um den festen Punkt drehen läßt, indem sie dieselben Winkel unter sich bilden, die Summe dieser Geraden unveränderlich bleibt. —

Auflösung. Wenn $\theta$ den Winkel bezeichnet, welchen eine ($r$) der $n$ Geraden mit einer festen Axe bildet; so sind die Winkel, welche die andern damit bilden, resp.:

$$\theta + \frac{2\pi}{n},\ \theta + \frac{4\pi}{n}, \ldots \theta + \frac{2(n-1)\pi}{n},$$

und wenn man $r = \varphi(\theta)$ setzt, so muß sein:

$$\varphi(\theta) + \varphi\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \varphi\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = n\,a,$$

wo $na$ eine gegebene constante Größe ist. Setzt man nun $\theta = \frac{2\pi z}{n}$, so ist:

$$\theta + \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi \,.\, (z+1)}{n}, \text{ \&c.}$$

und wenn gesetzt wird:

$$\varphi\left(\frac{2\pi z}{n}\right) = u_z;$$

so erhält man:

$$u_z + u_{z+1} + \ldots + u_{z+n-1} = na.$$

Die verschiedenen particulären Integrale dieser Differenzengleichung ohne den zweiten constanten Theil sind:

$$\cos\frac{2\pi z}{n}, \cos\frac{4\pi z}{n}, \ldots \cos\frac{2(n-1)\pi z}{n};$$

denn die Summe der Reihe:

$$\cos A + \cos(A+B) + \ldots + \cos\{A + (n-1)B\},$$

nämlich:

$$\cos\left\{A + \frac{n-1}{2}B\right\} . \frac{\sin\left(\frac{n}{2}B\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}B\right)}$$

verschwindet, wenn $\frac{nB}{2}$ ein Vielfaches von $\pi$ ist. — Wird nun einer dieser Cosinus für $u_z$ gesetzt, so wird aus:

$$u_z + u_{z+1} + \ldots + u_{z+n-1},$$

eine Reihe von obiger Form. Diese verschiedenen Functionen genügen also der Gleichung:

$$u_z + u_{z+1} + \ldots u_{z+n-1} = 0,$$

und der vollständige Werth von $u_z$ oder $\varphi(\theta)$ ist folglich:

$$u_z = a + C_1 \, . \cos \frac{2\pi z}{n} + C_2 \, . \cos \frac{4\pi z}{n} +$$

$$\ldots + C_{n-1} \, . \cos \frac{(2n-2)\pi z}{n} \, ;$$

Es ist aber $\theta = \frac{2\pi z}{n}$, und $C_1, C_2, \ldots$ sind arbiträre Functionen von $\cos 2\pi z$, oder $\cos n\theta$, welche mit:

$$f_1(\cos n\theta), \; f_2(\cos n\,\theta), \; \&c.$$

bezeichnet werden mögen; und folglich ist:

$$\varphi(\theta) = r = a + \cos\theta \, . f_1(\cos n\,\theta) + \cos 2\,\theta \, . f_2(\cos n\,\theta) +$$

$$\ldots . + \cos(n-1)\,\theta \, . f_{n-1}(\cos n\theta).$$

Es lassen sich nun unendlich viele algebraische Curven angeben, welche der verlangten Bedingung genügen, wovon die einfachste ist:

$$r = a + b \, . \cos\theta,$$

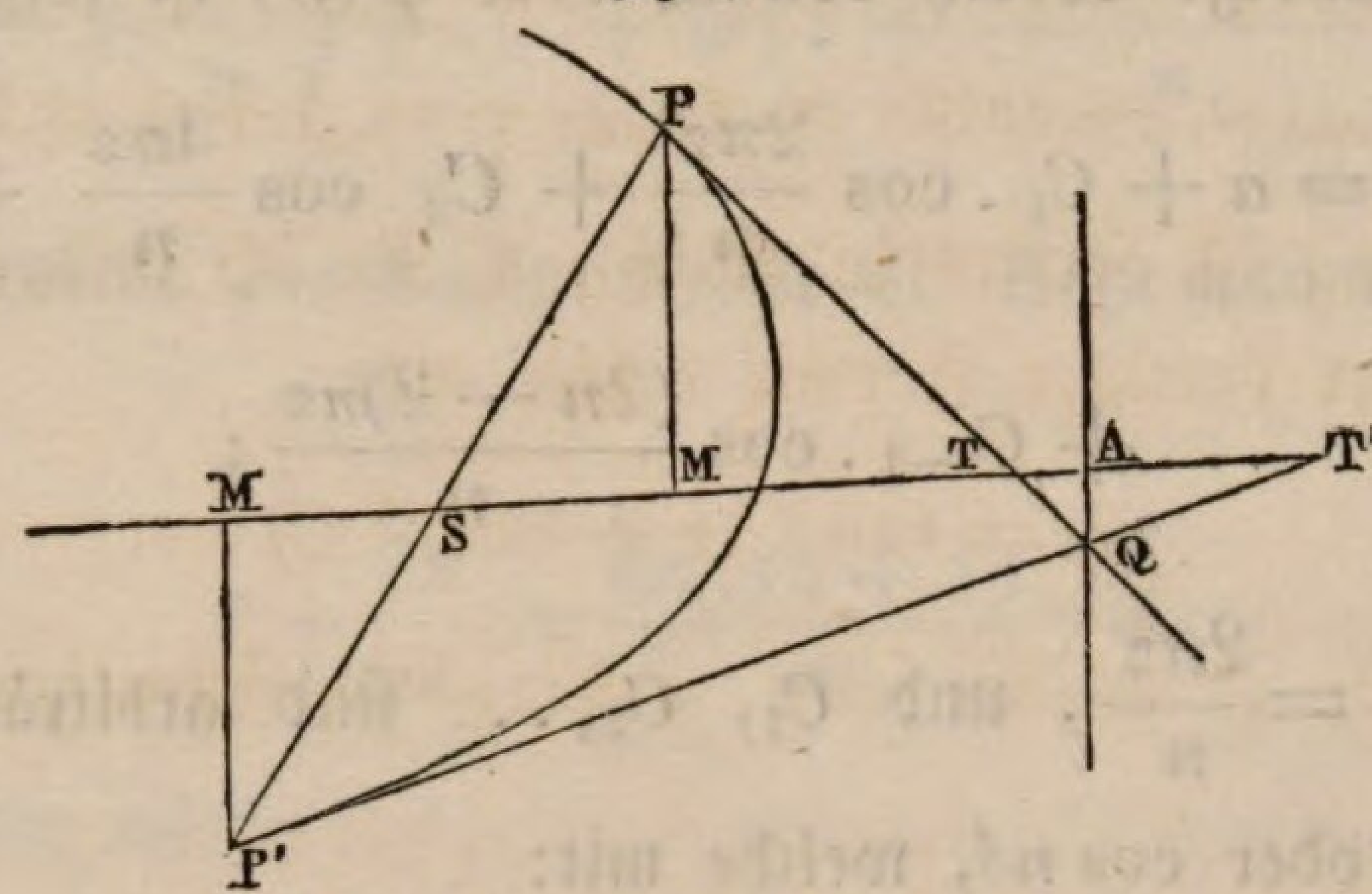
welche schon oben für $n = 2$ angeführt würde, und es ist eine höchst merkwürdige Eigenschaft dieser Curve: daß sie der geforderten Bedingung für jeden Werth von $n$ genügt, d. h.: Wenn man in der durch die Gleichung:

$$(x^2 - bx + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

ausgedrückten Curve ein System beliebig vieler Vectoren zieht, welche gleiche Winkel mit einander bilden, und man läßt dieses Vectorensystem sich um den Anfangspunkt drehen; so ist die Summe dieser Vectoren in der ganzen Ausdehnung der Curve constant. —

(6.) Wenn man durch den Brennpunkt einer Parabel eine beliebige Sehne, und an die Durchschnittspunkte mit der Curve Tangenten zieht; so bilden diese bekanntlich einen rechten Winkel mit einander. — Man soll nun untersuchen, in welcher Classe von Curven die allgemeinere Eigenschaft stattfindet: daß die beiden Tangenten einen gegebenen Winkel bilden. —

Fig. 4.




Auflösung. In Fig. 4 sei:

$$SM = x,\ SM' = x',\ SP = r,\ MSP = \theta,\ MP = y,\ M'P' = y'.$$

Weiter ist:

$$\angle PQP' = QTT' + QT'T = PTS + P'T'S,$$

sowie:

$$\tan PTS = \frac{dy}{dx},\ \text{und}\ \tan P'T'S = -\frac{dy'}{dx'},$$

und mithin, wenn $\angle PQP' = A$ gesetzt wird:

$$\tan A = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy'}{dx'}} \qquad (a)$$

Da nun die Punkte $P, P'$ beide auf der Curve liegen, so muß $\frac{dy'}{dx'}$ dieselbe Function von $\theta + \pi$ sein, wie $\frac{dy}{dx}$ von $\theta$. Setzt man also:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(\theta),\ \text{so ist}\ \frac{dy'}{dx'} = \varphi(\pi + \theta).$$

und für $z = \frac{\theta}{\pi}$, $u_z = \varphi(\theta)$ wird die Gleichung $(a)$:

$$\tan A = \frac{u_z - u_{z-1}}{1 + u_z u_{z+1}},$$

oder:

$$u_{z+1}\, u_z - \text{cotan}\, A\,.\,(u_{z+1} - u_z) + 1 = 0.$$

Diese Gleichung ist bereits in Abschn. 4, Nr. 20 integrirt, und durch Anwendung der dortigen Formel erhält man:

$$u_z = \tan(Az + \tan^{-1} C)$$

d. h. wenn für $C$ wieder eine arbiträre Function von $\cos 2\pi z$ gesetzt wird:

$$\varphi(\theta) = \tan\left\{\frac{A}{\pi}\theta + \tan^{-1} f(\cos 2\theta)\right\}; \qquad (b).$$

Nun ist aber:

$$y = r\,.\sin\theta,\ x = r\,.\cos\theta,$$

folglich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dr\,.\cos\theta + r d\theta\,.\cos\theta}{dr\,.\cos\theta - r d\theta\,.\sin\theta}$$

und dies $= \varphi(\theta)$ gesetzt, gibt die Differenzialgleichung:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta + \varphi(\theta)\,.\sin\theta}{\varphi(\theta)\,.\cos\theta - \sin\theta}\, d\theta$$

zwischen $r$ und $\theta$. Die Gleichung ($b$) gibt aber:

$$\varphi(\theta) = \frac{\tan\frac{A}{\pi}\theta + f(\cos 2\theta)}{1 - \tan\frac{A}{\pi}\theta . f(\cos 2\theta)},$$

und wenn man diesen Werth von $\varphi(\theta)$ in die obige Differenzialgleichung setzt; so erhält man nach verrichteten Reductionen:

$$\log\frac{r}{a} = \int d\theta\,.\cot\left\{\tan^{-1} f(\cos 2\theta) - \frac{\pi - A}{\pi}\,\theta\right\}$$

als Polargleichung der gesuchten Curve. — Wenn man für einen speciellen Fall $f(\cos 2\theta) = 0$ setzt, so wird:

$$\log\frac{r}{a}=\int d\theta\,.\cot\left(\frac{A-\pi}{\pi}\,\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{A-\pi}\,.\log\sin\left(\frac{A-\pi}{\pi}\,\theta\right)$$

und mithin:

$$r=a\,.\left\{\sin\frac{A-\pi}{\pi}\,\theta\right\}^{\frac{\pi}{A-\pi}}$$

welches immer algebraische Curven gibt, wenn $A$ zu dem ganzen Kreisumfange commensurabel ist. — Ist z. B. $A=\frac{\pi}{2}$, so ist $\frac{A-\pi}{\pi}=-\frac{1}{2}$, und:

$$r=\frac{a}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

die Gleichung einer Parabel, deren Brennpunkt der Anfangspunkt ist. —

Wenn $A=\pi$ ist, oder die beiden Tangenten parallel sind; so gibt die allgemeine Gleichung:

$$\log\frac{r}{a}=\int d\theta\,.f(\cos 2\,\theta),$$

weil die Form der Function $f$ arbiträr ist, und mithin $f(\cos 2\theta)$ für $\cot.(\tan^{-1}f(\cos 2\,\theta))$ gesetzt werden darf, ohne daß die Allgemeinheit der Gleichung beeinträchtigt wir. — In dieser Form enthält die Gleichung: 1, die logarithmische Spirale, wenn $f(\cos 2\,\theta)=b$ gesetzt wird, und 2, alle Curven, welche aus vier ähnlichen Theilen bestehen, die wie Quadranten um den Mittelpunkt vereinigt sind. —

(7.) In der Parabel schneiden sich die beiden Tangenten $PQ$, $P'Q$ (Fig. 4) immer auf der Directrix. — Man soll diese Eigenschaft verallgemeinern, oder die Classe von Curven finden, welche so beschaffen sind: daß die an die Endpunkte einer durch eiuen festen Punkt $S$ gehenden Sehne $PSP'$ gezogenen Tangenten sich stets

auf einer der Lage nach gegebenen Graden $AQ$ schneiden. —

Auflösung. Es sei $SA$ senkrecht auf $AQ$ und Axe der $x$, $SA = X$, $AQ = Y$, und die andern Bezeichnungen wie früher; so ist:

$$ST = X - x - y \, . \, \frac{dx}{dy}; \quad AT = X - x + y \, . \, \frac{dx}{dy},$$

folglich:

$$AQ = -\frac{dy}{dx} \, . \, AT,$$

oder:

$$Y = -\frac{dy}{dx}(X - x) - y. \qquad (a).$$

Ebenso findet man:

$$Y = -\frac{dy'}{dx'}(X - x') - x',$$

und aus der Gleichsetzung beider Werthe von $Y$ ergibt sich:

$$X = \frac{\left(x' \frac{dy'}{dx'} - x \frac{dy}{dx}\right) - (y' - y)}{\frac{dy'}{dx'} - \frac{dy}{dx}}.$$

Dieser Werth von $X$ muß nach der Bedingung der Aufgabe constant $= 2a$ sein, und folglich hat man:

$$2a\left(\frac{dy'}{dx'} - \frac{dy}{dx}\right) = x' \frac{dy'}{dx'} - x \frac{dy}{dx} - (y' - y),$$

oder:

$$(2a - x') \, . \, \frac{dy'}{dx'} + y' = (2a - x) \, . \, \frac{dy}{dx} + y.$$

Setzt man nun:

$$(2a - x) \, . \, \frac{dy}{dx} + y = u_x,$$

wo $z$ eine Größe bezeichnet, welche in $z+1$ übergeht, wenn $x$, $y$, resp. in $x'$, $y'$ übergehen; so erhält man:

$$u_{z+1} = u_z\,,\ \text{oder}\ \triangle u_z = 0$$

und mithin:

$$u_z = \text{constant}.$$

Es ist aber offenbar:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x},$$

d. h. die Function $\frac{y}{x}$ ändert sich nicht, wenn $x$, $y$ in $x'$, $y'$ oder $z$ in $z+1$ übergehen, und mithin kann die Constante in der obigen Gleichung als eine Function $f\left(\frac{y}{x}\right)$ von $\frac{y}{x}$ betrachtet werden, so daß man hat:

$$(2a-x)\,.\,\frac{dy}{dx} + y = f\left(\frac{y}{x}\right); \qquad (b).$$

Diese Differenzialgleichung wird sofort integrabel, wenn man $\frac{y}{x} = u$ setzt, so daß man hat:

$$\frac{dx}{x\,(2a-x)} + \frac{du}{2au - f(u)} = 0;$$

folglich:

$$\log\frac{x}{2a-x} + 2a\,.\int\frac{du}{2au - f(u)} = \log c. \qquad (c).$$

Setzt man z. B.:

$$f(u) = -\frac{2a}{u},$$

so wird:

$$\log\frac{x}{2a-x} + \frac{1}{2}\log\,(u^2+1) = \log c,$$

oder:

$$\frac{x^2}{(2a-x)^2}(u^2+1)=c^2,$$

oder wenn man für $u$ seinen Werth zurücksubstituirt und reducirt:

$$x^2+y^2=c^2\,(2a-x)^2,$$

welches die allgemeine Brennpunktsgleichung eines Kegelschnittes ist, und die Gerade, worauf sich die beiden Tangenten schneiden, ist offenbar keine andere, als die Directrix. Der Kegelschnitt selbst ist eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel, jenachdem der von den beiden Tangenten gebildete Winkel ein spitzer, rechter, oder stumpfer ist. —

Setzt man:

$$f(u)=+\frac{2a}{u},$$

so ergibt sich:

$$\log\frac{x}{2a-x}+\frac{1}{2}\log(u^2-1)=\log c,$$

oder für $u$ seinen Werth restituirt und reducirt:

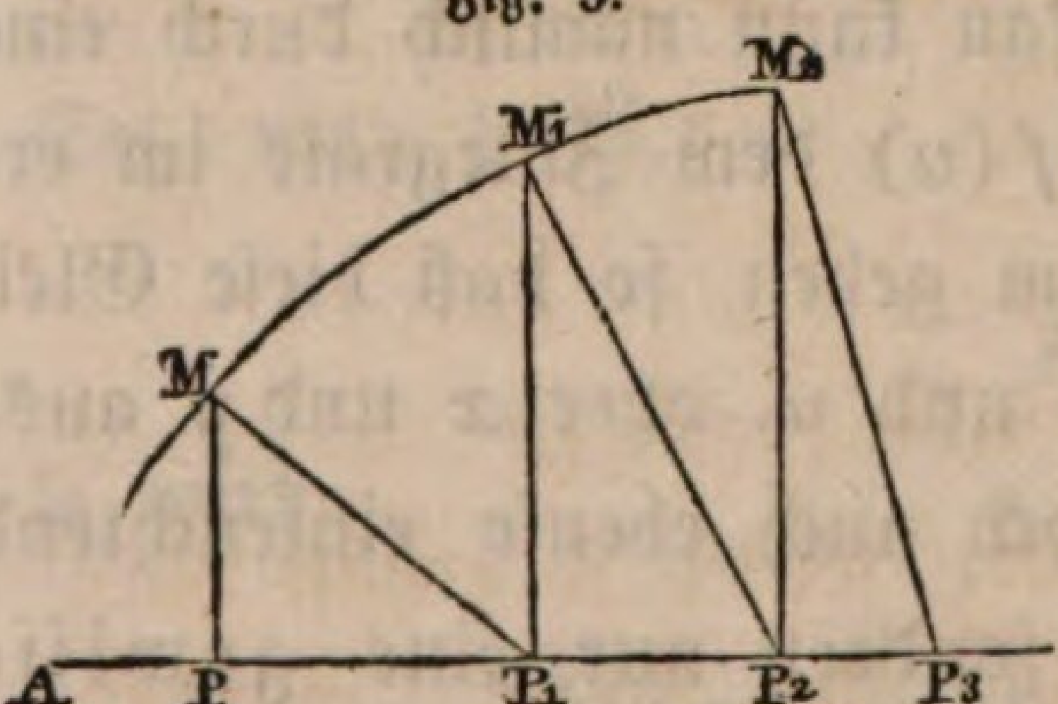
$$y^2-x^2=c^2\,(2a-x)^2,$$

welches ebenfalls die allgemeine Kegelschnittsgleichung ist, indem aber jetzt der Anfangspunkt der Coordinaten im Durchschnittspunkte der Axe der $x$ mit der Directrix liegt, und die beiden Tangenten sich stets auf der durch den Brennpunkt gehenden, auf der Axe der $x$ senkrechten Geraden schneiden. —

Die definitive Gleichung ($c$) der Aufgabe bietet noch eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit dar. Man kann nämlich durch eine schickliche Wahl der Form der Function $f(u)$ dem Integrale im ersten Theile von ($c$) jede beliebige Form geben, so daß diese Gleichung eine beliebige Relation zwischen $x$ und $u$, oder $x$ und $y$ ausdrücken kann — während andererseits doch auch ebenso einleuchtend ist: daß nicht alle möglichen Curven, sondern nur eine gewisse Klasse von Curven den Bedingungen der Aufgabe genügen können. — Die Function $f(u)$ kann also nicht absolut willkürlich

sein, sondern muß gewissen Beschränkungen unterliegen. — Aber wenn man auf die Gleichung ($b$) zurückgeht, in welche die Function $f$ zuerst eingeführt ist; so sieht man keinen Grund zur Beschränkung ihrer Allgemeinheit ein. Denn der erste Theil ist, wie sich leicht zeigen läßt, nichts weiter, als der analytische Ausdruck der Länge $AQ$, und da der zweite Theil ungeändert bleibt, so lange das Verhältniß von $x$ zu $y$ dasselbe bleibt, oder der Punkt $P'$ mit $P$ und $S$ in derselben Geraden liegt; so scheint diese Gleichung weiter nichts zu sein, als der algebraische Ausdruck der Bedingung der Aufgabe. — Dieser Widerspruch hat in der Elimination seinen Grund. — Von welcher Beschaffenheit die Curve auch sein mag, so kann man, wenn $\frac{y}{x} = u$ gesetzt wird, zwischen dieser Gleichung und der der Curve $x$, oder $y$ eliminiren, und mithin $x$, oder $y$, also auch $\frac{dy}{dx}$ durch $u$ ausdrücken; folglich den ersten Theil von ($b$) in allen Fällen durch Elimination auf eine Function von $u$ oder $\frac{y}{x}$ zurückführen. — Allein daraus folgt nicht: daß jede Curve die fragliche Eigenschaft hat; denn diese Function kann mehrere Werthe haben, was in allen Ausnahmefällen wirklich stattfindet. — Man darf also für $f(u)$ keine Form annehmen, welche mehrere Werthe hat; aber, abgesehen von dieser Beschränkung, bleibt die Function $f(u)$ ganz willkürlich. — Setzt man z. B. für $f(u)$ nur rationale Functionen, so erhält man sicher richtige Auflösungen; aber in allen andern Fällen muß die erhaltene Auflösung erst näher geprüft werden. —

Fig. 5.




(8.) Man soll die Klasse von Curven finden, in welchen die Subnormalen $PP_1$, $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, ... alle einander gleich sind. — Auflösung. Werden die Abscissen $AP$, $AP_1$, $AP_2$,... resp. mit $x_0, x_1, x_2, \ldots$ und die Ordinaten $PM$, $P_1 M_1$, $P_2 M_2$, ... resp. mit $y_0$, $y_1$, $y_2$, .... bezeichnet; so sind die Subnormalen:

$$PP_1 = y_0 \cdot \frac{dy_0}{dx_0}; \quad P_1P_2 = y_1 \cdot \frac{dy_1}{dx_1}; \text{ \&c.}$$

alſo:

$$x_1 = x_0 + y_0 \cdot \frac{dy_0}{dx_0}; \; x_2 = x_1 + y_1 \cdot \frac{dy_1}{dx_1},$$

und allgemein:

$$x_{z+1} = x_z + y_z . \frac{dy_z}{dx_z},$$

oder:

$$\triangle x_z = y_z . \frac{dy_z}{dx_z}.$$

Nach der Bedingung der Aufgabe müſſen die Subnormalen:

$$y_0 \frac{dy_0}{dx_0}, \quad y_1 \frac{dy_1}{dx_1}, \text{ \&c.}$$

alle einander gleich ſein, und folglich muß die letzte Gleichung in der Vorausſetzung integrirt werden: daß $y_z \frac{dy_z}{dx_z}$ ungeändert bleibt wenn $z$ in $z+1$ übergeht — Man kann daher ſetzen:

$$\triangle x_z = Z, \text{ und } \triangle Z = 0,$$

wo $Z$ eine arbiträre Function von $\cos 2\pi z$ oder von $\tan \pi z$ iſt; alſo wenn man integrirt:

$$x_z = Zz + Z'$$

wo $Z'$ eine andere willkürliche Function von $\tan \pi z$ iſt. — Nun iſt aber:

$$y_z . \frac{dy_z}{dx_z} = Z,$$

und wenn aus dieſer Gleichung $Z$ eliminirt wird; ſo erhält man eine Differenzialgleichung zwiſchen $x_z$ und $y_z$, oder kürzer, zwiſchen $x$ und $y$, welche die Natur der geſuchten Curve ausdrückt. — Da aber $Z$ und $Z'$ beide arbiträre Fuctionen von $\tan \pi z$ ſind, ſo kann

man die eine als eine arbiträre Function der andern ansehen, und setzen:

$$Z' = f(Z),$$

so daß man hat:

$$x = Zz + f(Z),$$

$$y\frac{dy}{dx} = Z.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen gibt:

$$z = \frac{x - f(Z)}{Z},$$

oder für $Z$ seinen Werth aus der zweiten gesetzt:

$$z = \frac{dx}{ydy}\left\{x - f\left(\frac{ydy}{dx}\right)\right\}.$$

Nun ist aber $Z$ eine willkürliche Function von $\tan \pi z$, welche durch:

$$Z = F(\tan \pi z)$$

ausgedrückt werde, und wenn man in diese Gleichung für $Z$, $z$ ihre obigen Werthe setzt; so erhält man:

$$y\frac{dy}{dx} = F\left\{\tan \pi\left(\frac{x - f\left(y\frac{dy}{dx}\right)}{y\frac{dy}{dx}}\right)\right\}$$

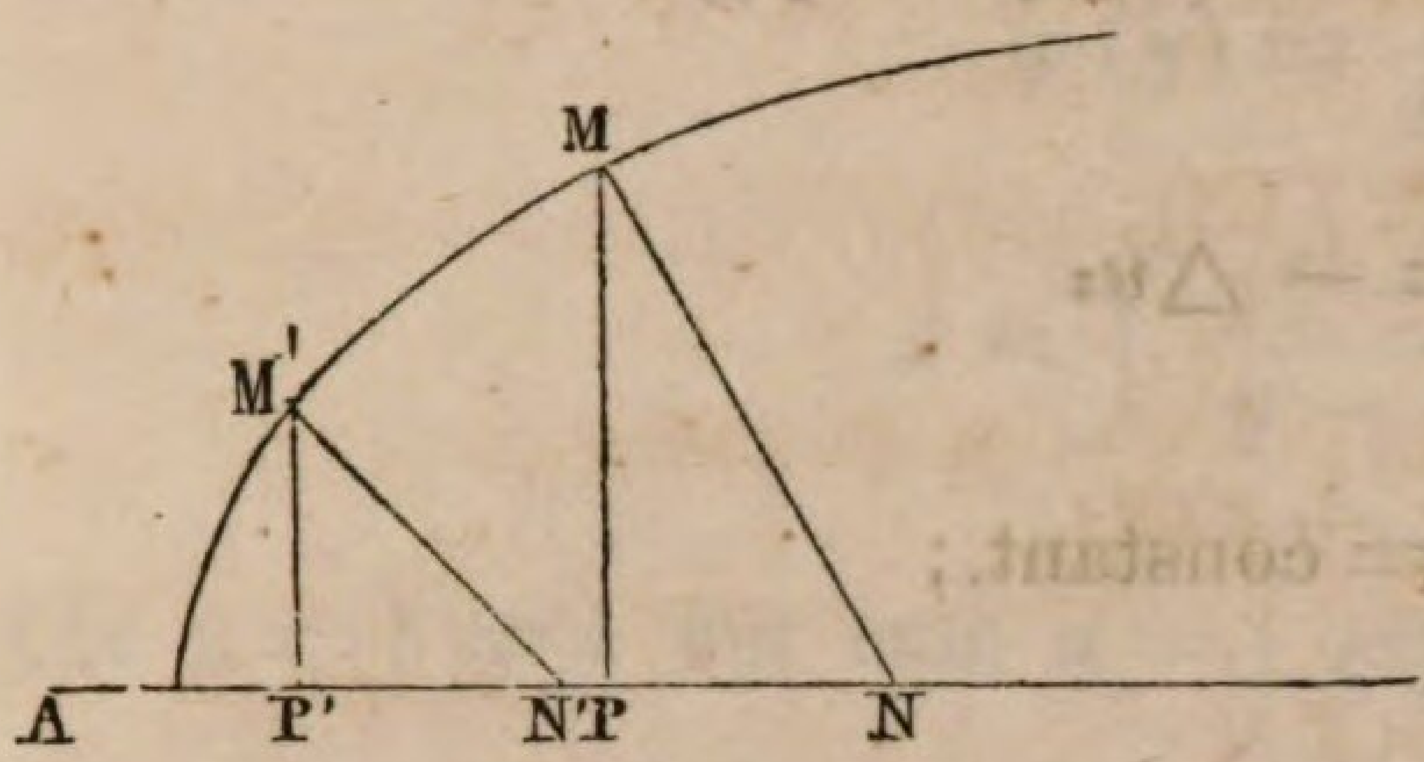
als Differenzialgleichung der gesuchten Curven, welche also zwei arbiträre Functionen enthält. — In dem besondern Falle, wo $F$ eine positive Constante bedeutet, hat man:

$$ydy = cdx,\ y^2 = 2cx + c'$$

d. h. die Gleichung einer Parabel. —

(9.) Man soll die Curven finden, welche die Eigenschaft haben: daß wenn in irgend einem Punkte $M$ derselben eine Normale

Fig. 6.




$MN$ gezogen, auf der Abscissenaxe eine Ordinate $PM$, errichtet, dann eine zweite Ordinate $P'M'$ der ersten Subnormale $PN$ gleich genommen, und eine zweite Normale $M'N'$ gezogen wird, diese der ersten Ordinate $PM$ gleich ist. —

Auflösung. Wenn $x$, $y$ die Coordinaten des ersten Punktes $M$ sind, und $x'$, $y'$ die des zweiten Punktes $M'$; so hat man zunächst $y' = y\frac{dy}{dx}$, und wenn man setzt:

$$y\frac{dy}{dx} = \varphi(y);$$

so ist die zweite Subnormale:

$$y'\frac{dy'}{dx'} = \varphi(y') = \varphi\left(\frac{ydy}{dx}\right)$$

$$= \varphi\ \{\varphi(y)\} = \varphi^2(y),$$

welche nach der Bedingung der Aufgabe der ersten Ordinate $y$ gleich sein muß; man hat daher die Functionalgleichung:

$$\varphi^2(y) = y,$$

woraus die Natur der Function $\varphi$ bestimmt werden muß. Setzt man:

$$y = u_z, \text{ und } \varphi(y) = u_{z+1},$$

so hat man:

$$u_{z+1} = \varphi\, u_z.$$

Aber die gegebene Gleichung gibt:

$$\varphi^2(y) = (\varphi u_{z+1}) = y = u_z,$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$\varphi u_{z+1} - \varphi u_z = -(u_{z+1} - u_z),$$

oder:

$$\Delta \varphi u_z = - \Delta u_z$$

also:

$$\varphi u_z + u_z = \text{constant.};$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$u_z = \varphi\, u_{z+1}, \text{ und } \varphi u_z = u_{z+1}$$

folgt aber durch Multiplication:

$$u_z \,.\, \varphi\, u_z = u_{z+1} \,.\, \varphi\, u_{z+1}.$$

Diese Function ändert sich also nicht, wenn $z$ in $z+1$ übergeht, und die Constante kann folglich als eine arbiträre Function derselben angesehen werden, so daß man hat:

$$u_z + \varphi u_z = f\,(u_z \,.\, \varphi u_z),$$

oder:

$$y + \varphi\,(y) = f\,\{y \,.\, \varphi\,(y)\},$$

woraus $\varphi\,(y)$ auf die gewöhnliche Weise gefunden werden kann, wenn man $f$ eine beliebige Form gegeben hat. —

Integrirt man nun die Gleichung:

$$\frac{ydy}{dx} = \varphi\,(y),$$

so erhält man:

$$x = \int \frac{ydy}{\varphi(y)}$$

als Gleichung der Curve, und wenn man setzt:

$$f\,(y \,.\, \varphi y) = a + by \,.\, \varphi\,(y);$$

so hat man:

$$y + \varphi\,(y) = a + by \,.\, \varphi\,(y),$$

$$\varphi(y) = \frac{y-a}{by-1}$$

$$x = \int \frac{by^2 - y}{y-a} dy .$$

Für $a = b = 1$ hat man $x = \int y dy = \frac{y^2}{2}$, die Gleichung der gewärnlichen Parabel, welche also, so wie die cubische Parabel, der Aufgabe genügt —

(10.) Man soll die Curven finden, welche so beschaffen sind: daß, wenn die Ordinate und der Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes derselben gezogen sind, stets ein zweiter Punkt der Curve gefunden werden kann, dessen Ordinate und Krümmungshalbmesser resp. dem Krümmungshalbmesser und der Ordinate des ersten Punktes gleich ist. —

Auflösung. Wenn man setzt:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\, d^2y} = \varphi(y),$$

so kommt man auf dieselbe Gleichung:

$$\varphi^2(y) = y,$$

woraus $\varphi(y)$ bestimmt werden muß, und die vorhergehende Differenzialgleichung bestimmt alsdann die gesuchte Curve. —

Setzt man z. B. $\varphi(y) = \frac{a^2}{y}$, welches offenbar der Bedingung genügt; so hat man:

$$\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{a^2}{y},$$

oder $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt:

$$ydy = \frac{a^2 p dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y^2 - b = -\frac{2a^2}{\sqrt{(1+p^2)}};$$

folglich, wenn für $p$ sein Werth restituirt wird:

$$dx = \frac{(y^2 - b)}{\sqrt{\{4a^4 - (y^2 - b)^2\}}} \cdot dy$$

welches die Differenzialgleichung der elastischen Linie ist. — Auf ganz ähnliche Weise wird die Aufgabe gelöst, wenn statt der Ordinate und des Krümmungshalbmessers irgend zwei andere Linien genommen werden, welche sich durch $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ ausdrücken lassen. —

Man bekommt auch wieder eine Functionalgleichung zweiter Ordnung $\varphi^2(y) = y$ aufzulösen, und dann eine Differenzialgleichung zu integriren, worin die so bestimmte Function vorkommt. — Beispiele dieser Art lassen sich leicht mehrere angeben; allein das Vorhergehende genügt, um die Methode anzudeuten, welche in schwierigern Fällen befolgt werden muß. — Man kommt immer auf mehr oder weniger complicirte Functionalgleichungen, deren Auflösung zuweilen durch Reduction auf eine Differenzengleichung erleichtert wird, am häufigsten aber durch specielle Betrachtungen gelingt. — Auch durch die folgende einfache Ueberlegung kann man zur Lösung dieses und ähnlicher Probleme gelangen: Da nämlich der Krümmungshalbmesser und die Ordinate des zweiten Punktes resp. der Ordinate und dem Krümmungshalbmesser des ersten Punktes gleich sein soll; so müssen diese beiden Größen $y, R$ als Functionen der Abscisse $x$ betrachtet, so beschaffen sein: daß wenn $y$ in $R$ umgesetzt wird, $R$ in $y$ übergehen muß, also eine symmetrische Function $f$ derselben ungeändert bleiben muß, so daß man hat:

$$f(y, R) = f(R, y) = \text{const.} = a,$$

und für $R$ seinen bekannten Werth gesetzt, ergibt sich als Differenzialgleichung der gesuchten Curve:

$$f\left(y, \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\, d^2y}\right) = a.$$

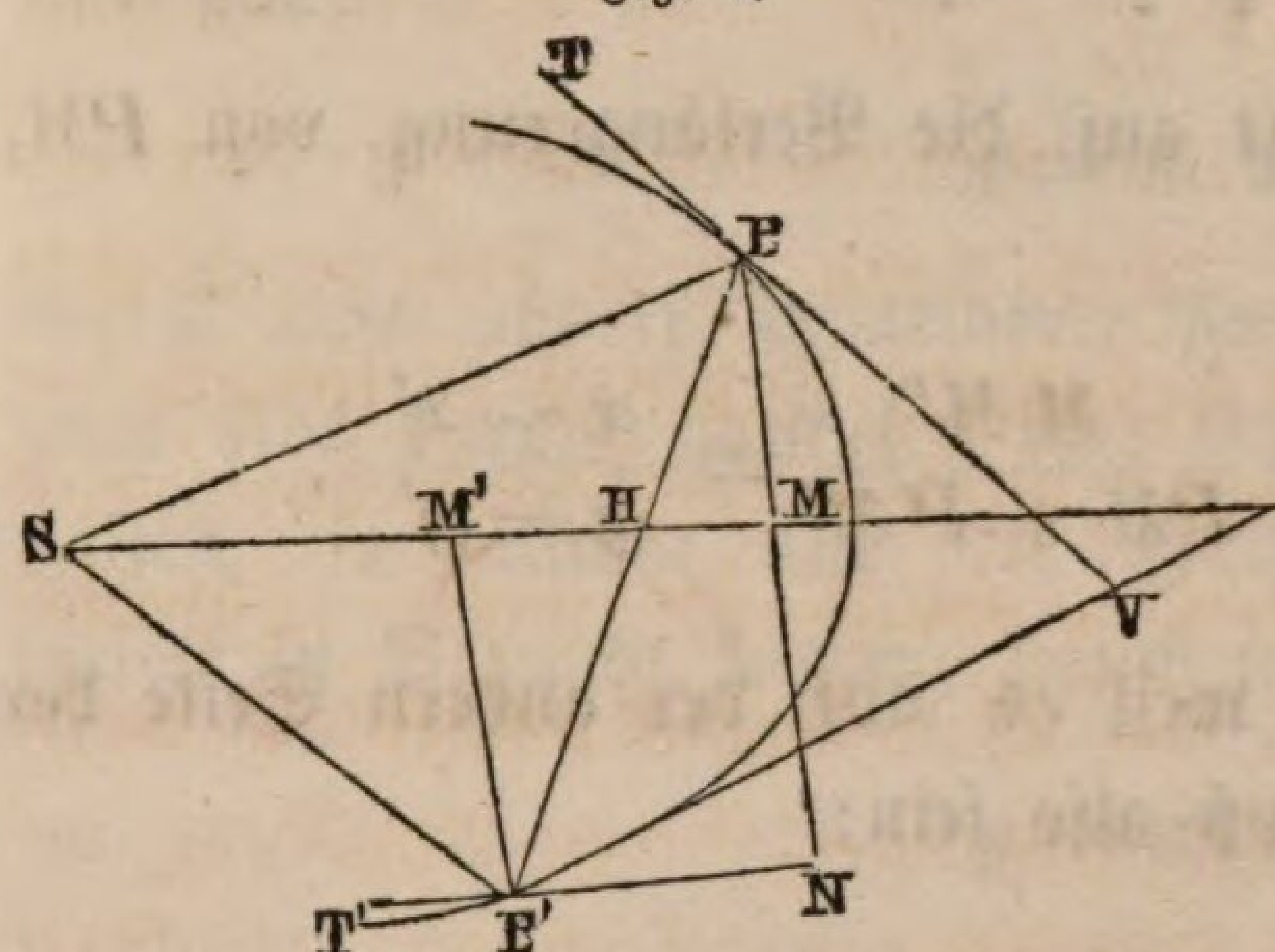
Für:

$$y \cdot R = a^2, \; R = \frac{a^2}{y}$$

kommt man wieder auf die elastische Linie.

(11.) Man soll die Curve finden, welche so beschaffen ist: daß ein zweimal von derselben reflectirter materieller Punkt immer wieder zu der Stelle zurückkehrt, von welcher derselbe ausgegangen ist, in welcher Richtung er sich ursprünglich auch bewegen mag — vorausgesetzt: daß der Einfallswinkel dem Zurückwerfungswinkel gleich ist. —

Fig. 7.




Auflösung. Es sei $PMP'$ (Fig. 7) die gesuchte Curve, $S$ der Ausgangspunkt, $SPP'S$ der Weg des materiellen Punktes, $PV, P'V$ Tangenten in $P'$ und $P'$, $SM = x, PM = y$; so hat man:

$$\tan SPM = \frac{x}{y}$$

und:

$$\tan MPT = \frac{dx}{dy},$$

indem $y$ abnimmt, wenn $x$ zunimmt. — Folglich ist:

$$\tan SPT = \tan (MPT - SPM)$$

$$= \frac{\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = \tan VPH,$$

oder $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt:

$$\tan VPH = \frac{y - px}{x + py}$$

nach der Bedingung der ersten Reflexion. Es ist aber auch:

$$\tan VPM = -\frac{dx}{dy},$$

und mithin:

$$\tan HPM = \tan(VPH - VPM)$$
$$= \frac{x(1-p^2)+2py}{y(1-p^2)-2px}.$$

Zieht man ferner $P'N$ senkrecht auf die Verlängerung von $PM$, so hat man:

$$\tan HPM = \tan P'PN = \frac{MM'}{PM+P'M'} = \frac{x-x'}{y-y'},$$

wo $y'$ negativ genommen ist, weil es auf der andern Seite der Axe der $x$ liegt. — Hiernach muß also sein:

$$y'-y = (x'-x)\,.\,\frac{y(1-p^2)-2px}{x(1-p^2)+2py}. \qquad (a).$$

Betrachtet man nun $y, y'$ und $x, x'$ als zwei successive Werthe zweier Functionen $y$, $x$ einer gewissen independenten Veränderlichen $z$, welche bei dem Uebergange von $P$ zu $P'$ in $z+1$ übergeht, und setzt den Bruch im zweiten Theile der letzten Gleichheit $=P$; so wird dieselbe:

$$\Delta y = P\Delta x; \qquad (b).$$

Diese Gleichung allein genügt noch nicht, weil sie zwei unbekannte Functionen $x$, $y$ enthält, und um eine zweite Gleichung zu erhalten, muß man bemerken, daß nach dem vorhin Bewiesenen:

$$P = \text{cotan}\, HPM,$$

ist, und folglich ist:

$$P' = \text{cotan}\, HP'M',$$

weil $P'$ der $z+1$ entsprechende Werth von $P$ ist. — Aber nach

der Bedingung der Aufgabe müssen $P, H$ und $P'$ in einer Geraden liegen, so daß $\angle HPM = \angle HP'M'$ und:

$$P' = P, \; P' - P = \triangle P = 0$$

ist, woraus durch Integration folgt:

$$P = \text{const} = \text{funct} (\tan \pi z) = Z \qquad (c).$$

Setzt man dies in die Gleichung $(b)$, so wird sie sofort integrabel, und gibt:

$$y = Z \, . \, x + Z',$$

wo $Z'$ eine andere invariabele Function von $z$ ist. — Da es sich aber blos darum handelt: eine Gleichung zwischen $x$ und $y$ zu erhalten, so braucht nur die Hülfsveränderliche $z$, welche nicht weiter in Betracht kommt, zwischen den Gleichungen:

$$y = x \, . \, Z + Z',$$

$$Z = \frac{y(1 - p^2) - 2px}{x(1 - p^2) + 2py}$$

eliminirt zu werden, wozu man sich des schon in Nr. 8 benutzten Kunstgriffes bedienen kann. — Denn da $Z$ und $Z'$ beide arbiträre Functionen von $\tan \pi z$ sind, so kann man die eine als eine arbiträre Function der andern ansehen, also setzen:

$$Z' = f(Z),$$

so daß man hat:

$$y = x \, . \, Z + f(Z),$$

und wenn man für $Z$ seinen Werth setzt:

$$y = x \, . \, \frac{y(1 - p^2) - 2px}{x(1 - p^2) + 2qy} + f\left(\frac{y(1 - p^2) - 2px}{x(1 - p^2) + 2py}\right)$$

welches die Differenzialgleichung der gesuchten Curve ist. — Wenn die arbiträre Function $= 0$ gesetzt wird, so ist die Gleichung die des Kreises — und wenn diese Function $= \text{const.} = a$ gesetzt wird;

so wird die Gleichung die eines Kegelabschnittes in Beziehung auf den Brennpunkt. —

Die vorhergehende Aufgabe läßt sich offenbar in folgender Weise verallgemeinern:

(12.) Man soll die Natur einer Curve nach irgend einer Eigenschaft zweier um ein endliches Intervall von einander abstehender Punkte derselben bestimmen. —

Auflösung. Von welcher Beschaffenheit die bekannte Eigenschaft auch sein mag, so muß man mittelst derselben doch, wenn ein Punkt $P$ der Curve gegeben ist, den andern Punkt $P'$, oder die Richtung der Geraden $PP'$ bestimmen können, so daß man vermittelst der Bedingung der Aufgabe immer die Contangente des Winkels $MPH$ (Fig. 7) durch eine mehr oder weniger complicirte Function der Coordinaten $x, y$; $x', y'$ der Punkte $P, P'$ und deren Differentialquotienten, wie:

$$F\left(x, y, x', y', \frac{dy}{dx}, \frac{dy'}{dx'}, \text{\&c.}\right) = P$$

ausdrücken kann. Alsdann ergibt sich wie in der vorhergehenden Aufgabe:

$$y' - y = P.(x' - x)\text{; oder } \triangle y = P.\triangle x;$$

aber da die gegebene Eigenschaft den beiden Punkten $P, P'$ gemeinschaftlich zukommt, und dieselben mit einander verbindet; so wird dieselbe Cotangente, wenn man von dem Punkte $P'$ ausgeht, durch $P'$ ausgedrückt, und muß sich aus $P$ ergeben, wenn $x, y$ resp. mit $x', y'$, und umgekehrt, vertauscht werden. — Nun ist aber:

$$\text{cotan } M'P'H = \text{cotan } MPH;$$

folglich:

$$P' = P,\text{ oder } \triangle P = 0.$$

Es muß also $P$ als unveränderlich betrachtet werden, und man hat wieder:

$$y = Px + f(P) \ldots (a).$$

Alsdann sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1, wenn die Function **P** nur die Coordinaten $x$, $y$ des Punktes **P** und ihre Differentialquotienten enthält — in welchem Falle die Gleichung ($a$) schon die Differenzialgleichung der gesuchten Curve ist — und 2, wenn die Coordinaten und deren Differenzialquotienten beider Punkte $P, P'$ darin vorkommen, in welchem Falle die Gleichungen:

$$y' - y = P(x' - x),$$

$$y = Px + f(P),$$

$$P' = P,$$

combinirt werden müssen, um $x'$, $y'$ zu eliminiren — und die resultirende Gleichung drückt alsdann die Natur der gesuchten Curve aus. —

(13.) Die Relation zwischen den beiden Punkten $P, P'$ bestehe z. B. darin: daß die Normale der Curve in dem einen Punkte durch den andern Punkt geht. — Hier ist $PH$ eine solche Normale, und folglich:

$$P = \tan PHM = \frac{dx}{-dy} = \frac{-1}{p}, \ \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

Die Differenzialgleichung der Curve ist also:

$$y = \frac{-x}{p} + \text{funct}\left(\frac{-1}{p}\right),$$

oder:

$$x + py = f(p).$$

Für $f(p) = 0$ hat man:

$$xdx + ydy = 0,$$

$$x^2 + y^2 = c^2$$

d. h. die Gleichung des Kreises. —

(14.) Man soll die Curve finden, in welcher stets

$$MH = \frac{xy + a(y' + b)}{a^2} \times y;$$

und:

$$M'H = \frac{x'y' + a(y + b)}{a^2} \times y'$$

ist, so daß die Punkte $P, P'$ vertauscht werden können. —

Auflösung. Wegen:

$$P = \frac{MH}{MP}, \text{ ist } P = \frac{xy + a(y' + b)}{a^2};$$

mithin gibt die Gleichung $P' = P$ sofort:

$$xy + ay' + ab = x'y' + ay + ab,$$

$$a(y' - y) = x'y' - xy,$$

wogegen die Gleichung:

$$y' - y = (x' - x) \cdot P$$

gibt:

$$a(y' - y) = (x' - x) \cdot \frac{xy + a(y' + b)}{a}; \ldots (a),$$

woraus folgt:

$$ax'y' - axy = xx'y - x^2y + ax'y' - axy' + ab(x' - x),$$

d. h.:

$$a(y' - y) \cdot x = (xy + ab)(x' - x).$$

Hieraus folgt in Verbindung mit $(a)$ leicht:

$$y' = \frac{(a - x)(xy + ab)}{ax},$$

und:

$$x' = \frac{a^2 b}{xy + ab}.$$

Diese Werthe geben:

$$P = \frac{xy + ab}{ax} = P',$$

und dies in die Gleichung:

$$y = Px + f(P)$$

substituirt, gibt:

$$y(a - x) = ab + a \,.\, f(P)$$

oder:

$$y(a - x) = f\left(\frac{xy + ab}{ax}\right).$$

Nimmt man die arbiträre Function = const. = $c^2$, so erhält man:

$$y(a - x) = c^2,$$

d. h. die Gleichung einer Hyperbel. —

---

# Elfter Abschnitt.

## Aufgaben über periodische Differenzengleichungen.

(1.) Man soll eine Function von $x$ finden, welche so beschaffen ist: daß sie, wenn $x$ alle ganzzahligen Werthe von 0 bis $\infty$ annimmt, nach regelmäßigen Perioden die $n$ Werthe $a, b, c \dots k$ bekommt. —

Auflösung. Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$ die $n$ten Wurzeln der Einheit sind, und:

$$S_x = \frac{\alpha^x + \beta^x + \gamma^x \dots + \nu^x}{n},$$

gesetzt wird; so ist:

$$P_x = a \,.\, S_x + b \,.\, S_{x-1} + \dots k \,.\, S_{x-n+1},$$

die gesuchte Function. — Denn wenn $x$ ein Vielfaches von $n$ ist, so wird wegen der bekannten Eigenschaft der Wurzeln der Einheit die Function $S_x = 1$, und in allen andern Fällen $= 0$. Nun ist aber einer der Werthe $x, x-1, x-2, \dots x-n+1$, nothwendig ein solches Vielfaches — und wenn $x$ alle ganzzahligen Werthe von 0 bis $\infty$ annimmt; so muß $P_x$ offenbar in regelmäßigen Perioden die Werthe $a, b, c, \dots k, a, b, c, \dots k$, &c. annehmen. —

(2.) Man soll eine Function $P_x$ finden, welche nach regelmäßigen Perioden dieselben Werthe annimmt, wie $n$ andere gegebene Functionen $a_x, b_x, c_x, \dots k_x$. —

Auflösung. Es ist:

$$P_x = a_x \,.\, S_x + b_x \,.\, S_{x-1} + \dots k_x \,.\, S_{x-n+1}.$$

Denn die $x = 0, 1, 2, \ldots n-1, n, n+1, \ldots$ entsprechenden Werthe von $P_x$ sind, resp $a_0, b_1, c_2, \ldots k_{n-1}, a_n, b_{n+1}, \ldots$

(3.) Lehrsatz. Jede symmetrische Function von $S_x$, $S_{x-1}, S_{x-2}, \ldots S_{x-n+1}$ ist unveränderlich. —

Beweis. Denn wenn sich $x$ von 0 bis $\infty$ ändert, so ist immer einer der Werthe dieser Größen $= 1$ und die übrigen sind $= 0$, und da die fragliche Function symmetrisch ist; so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung dies der Fall ist. — Diese Function hat daher denselben Werth, welches ihrer Elemente $= 1$ ist, während alle übrigen $= 0$ sind; d. h. ihr Werth ändert sich nicht, wenn $x$ sich von 0 bis $\infty$ in ganzen Zahlen ändert. — So ist z. B.:

$$S_x + S_{x-1} + S_{x-2} + \ldots . S_{x-n+1} = 1,$$

$$S_x . S_{x-1} . S_{x-2} \ldots . S_{x-n+1} = 0.$$

(4.) Lehrsatz. Jede symmetrische Function der periodischen Functionen:

$$P_x, P_{x-1}, P_{x-2}, \ldots P_{x-n+1}$$

ist unveränderlich, wenn die Coefficienten der letztern constant sind. —

Beweis. Denn jede solche Function ist eine symmetrische Function von:

$$S_x, S_{x-1}, \ldots . S_{x-n+1},$$

weil vermöge der Eigenschaften der Wurzeln der Einheit ist:

$$S_{x-n} = S_x, \; S_{x-n-1} = S_{x-1}, \text{\&c.}$$

und folglich:

$$P_x = a . S_x + b . S_{x-1} + \ldots . k . S_{x-n+1}$$

$$P_{x-1} = k . S_x + a . S_{x-1} + \ldots . j . S_{x-n+1}$$

$$P_{x-2} = j . S_x + k . S_{x-1} + \ldots . i . S_{x-n+1}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$P_{x-n+2} = b . S_x + c . S_{x-1} + \ldots . a . S_{x-n+1}.$$

Nun enthält aber jede symmetrische Function der zweiten Theile dieser Gleichungen offenbar die Größen:

$$S_x,\ S_{x-1},\ldots. S_{x-n+1},$$

symmetrisch, ist also invariabel, und ihr Werth ist dem einer Function gleich, worin die Coefficienten $a, b, c, \ldots.$ symmetrisch vorkommen. — Für $n = 2$ ist z. B.:

$$P_x = a \,.\, S_x + b \,.\, S_{x-1},$$

und:

$$P_x \,.\, P_{x-1} = (a \,.\, S_x + bS_{x-1})(a \,.\, S_{x-1} + b \,.\, S_x)$$

$$= a\,b\,(S_x)^2 + a\,b\,(S_{x-1})^2 = a\,b\,(S_x{}^2 + S_{x-1}{}^2) = ab.$$

(5.) Ferner ist:

$$P_x \,.\, P_{x-1} \ldots. P_{x-n+1} = a \,.\, b \,.\, c \ldots. k;$$

$$P_x + P_{x-1} + \ldots. P_{x-n+1} = a + b + c + \ldots. k;\ \&c.$$

(6.) Periodische Differenzengleichungen heißen die, deren Coefficienten periodische Functionen sind. — Um sie auflösen zu können, müssen sie auf Gleichungen mit Coefficienten von gewöhnlicher Form zurückgeführt werden, wozu die vorhergehenden Lehrsätze dienen. — Um mit einem einfachen Beispiele zu beginnen, sei:

$$u_{x+2} \pm P_x \,.\, u_{x+1} \pm u_x = 0,$$

wo $P_x$ eine periodische Function zweiten Grades, d. h.:

$$n = 2,\ P_x = a \,.\, S_x + b \,.\, S_{x-1})$$

ist. Man setze:

$$u_x = v_x \,.\, \sqrt{(P_x)}$$

so ist:

$$u_{x+2} = v_{x+2} \sqrt{(P_{x+2})} = v_{x+2} \,.\, \sqrt{(P_x)},$$

und die Gleichung wird:

$$v_{x+2} \sqrt{(P_x)} \pm P_x \,.\, v_{x+1} \,.\, \sqrt{(P_{x+1})} \pm v_x \sqrt{P_x} = 0,$$

oder:

$$v_{x+2} \pm v_{x+1} \cdot \sqrt{(P_x \cdot P_{x+1})} \pm v_x = 0.$$

Der Coefficient:

$$\sqrt{(P_x\, P_{x+1})}$$

des zweiten Gliedes ist eine symmetrische Function, also nach Nr. 4 invariabel, und $= \sqrt{(ab)}$, so daß man die gewöhnliche Differenzengleichung:

$$v_{x+2} \pm \sqrt{(ab)} \cdot v_{x+1} + v_x = 0,$$

mit constanten Coefficienten erhält, welche sich leicht integrirt. —

(7.) Ein allgemeineres, auf alle periodische Differenzen-Gleichungen anwendbares Verfahren besteht darin: daß man für die independente Veränderliche eine periodische Function mit unbekannten und veränderlichen Coefficienten annimmt, wie in der Gleichung:

$$u_x + (a \cdot S_x + b \cdot S_{x-1})\, u_{x-1} + (\alpha \cdot S_x + \beta \cdot S_{x-1}) = 0.$$

Setzt man:

$$u_x = A_x \cdot S_x + B_x \cdot S_{x-1},$$

so ergibt sich durch Substitution und nach Nr. 5:

$$\left.\begin{array}{l} A_x \cdot S_x + B_x \cdot S_{x-1} \\ + a\, B_{x-1} S_x + b \cdot A_{x-1} S_{x-1} \\ + \alpha \cdot S_x \qquad + \beta \cdot S_{x-1} \end{array}\right\} = 0,$$

woraus folgt, wenn man die Coefficienten von $S_x$ und $S_{x-1}$ einzeln $= 0$ setzt:

$$A_x + a \cdot B_{x-1} + \alpha = 0; \qquad B_x + b \cdot A_{x-1} + \beta = 0.$$

Durch Elimination von $B_x$ ergibt sich:

$$A_x - ab \cdot A_{x-2} + (\alpha - a\beta) = 0,$$

woraus folgt:

$$A_x = (C \cdot S_x + C' \cdot S_{x-1})\, \{\sqrt{(ab)}\}^x - \frac{\alpha - a\beta}{1 - ab},$$

und dann aus der zweiten der obigen Gleichungen:

$$B_x = -b\,\{\sqrt{(ab)}\}^{x-1}\,(C'.S_x + C.S_{x-1}) - \frac{\alpha - a\beta}{1-ab}.$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck von $u_x$ gesetzt, so erhält man:

$$u_x = C\,\{\sqrt{(ab)}\}^x.\{\sqrt{a}.S_x - \sqrt{b}.S_{x-1}\}$$

$$-\frac{(\alpha - a\beta)\,S_x + (\beta - b\alpha)\,S_{x-1}}{1-ab},$$

worin blos eine arbiträre Constante $C$ vorkommt, wie es auch sein muß. —

(8.) Die periodische Differenzengleichung sei:

$$u_x + (a.S_x + b.S_{x-1})\,u_{x-1} + c = 0.$$

Hier ist:

$$c = c.S_x + c.S_{x-1}$$

also blos ein besonderer Fall des vorhergehenden, und folglich:

$$u_x = C\,\{\sqrt{(ab)}\}^x.\{\sqrt{a}.S_x - \sqrt{b}.S_{x-1}\}$$

$$c - .\frac{(1-a)\,S_x + (1-b)\,S_{x-1}}{1-ab}.$$

(9.) Die gegebene Gleichung sei:

$$u_{x+1} - R.u_x = P_x,$$

wo $R$ constant ist, und $P_x$ eine periodische Function der Periode $n$, d. h.:

$$P_x = a.S_x + b.S_{x-1} + \ldots.k.S_{x-n+1}.$$

(10.) Die zu integrirende Gleichung sei:

$$u_{x+1} - R.u_x + P_x = 0,$$

wo $R$ constant und $P_x$ eine periodische Function von der Form:

$$a S_x + b S_{x-1} + c S_{x-2} + \ldots . k S_{x-n+1}$$

ist. Man setze:

$$u_x = A_x . S_x + B_x . S_{x-1} + \ldots K_x . S_{x-n+1},$$

so wird:

$$u_{x+1} = B_{x+1} S_x + C_{x+1} S_{x+1} + \ldots . A_{x+1} S_{x-n+1},$$

und die Gleichung wird durch Substitution:

$$0 = (B_{x+1} - RA_x + a) S_x + (C_{x+1} - R . B_x + b) S_{x-1} + \ldots .$$
$$\ldots \ldots + (A_{x+1} - R . K_x + k) S_{x-n+1}.$$

Setzt man die Coefficienten der einzelnen Glieder $= 0$, so ergibt sich:

$$B_{x+1} = RA_x - a,$$
$$C_{x+1} = PB_x - b,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_{x+1} = RK_x - k,$$

woraus folgt:

$$C_{x+2} = R^2 A_x - (Ra + b),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_{x+n} = R^n A_x - (aR^{n-1} + bR^{n-2} + \ldots . + k).$$

Die Integration dieser letzten Gleichung gibt:

$$A^x = R^x . \{ C . S_x + C' . S_{x-1} + \ldots . C . S_{x-n+1} \}$$
$$- \frac{aR^{n-1} + bR^{n-2} \ldots . + k}{1 - R^n},$$

wo $C, C', \ldots . n$ arbiträre Constanten sind. Da aber:

$$u_x = A_x . S_x + B_x . S_{x-1} + \text{\&c.},$$

ist, so kann man in $A_x$ alle Glieder außer dem mit $S_x$ in $B_x$ alle

Glieder außer dem mit $S_{x-1}$ ... &c. hinweglassen, oder was zuletzt auf dasselbe hinausläuft, die Constanten $C', C'', \ldots = 0$ setzen, weil $u_x$ nur eine willkürliche Constante $C$ enthalten kann. —*)

Auf diese Weise ergibt sich, wenn $Q$ den constanten Theil von $A_x$ bedeutet:

$$A_x = C \cdot R^x S_x - Q,$$

$$B_x = C \cdot R^x S_{x-1} + (RQ + a),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$K_x = C \cdot R^x S_{x-n+1} - (R^{n-1} Q + aR^{n-2} + bR^{n-3} \ldots + j)$$

und durch Substitution dieser Werthe endlich:

$$u_x = C \cdot R^x - \frac{aR^{n-1} + bR^{n-2} + \ldots + k}{1 - R^n} \cdot S_x,$$

$$- \frac{bR^{n-1} + \ldots kR + a}{1 - R^n} S_{x-1},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$- \frac{kR^{n-1} + aR^{n-2} + \ldots + j}{1 - R^n} S_{x-n+1}.$$

(11.) Die gegebene Gleichung sei:

$$u_{x+1} - P_x u_x + P'_x = 0,$$

wo:

$$P_x = Sa_x + b \cdot S_{x-1} + \ldots k \cdot S_{x-n+1},$$

und:

$$P'_x = \alpha S_x + \beta S_{x-1} + \ldots \varkappa S_{x-n+1}$$

---

*) Dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man alle diese Constanten beibehält, die allgemeinen Werthe von $A_x, B_x, \ldots, K_x$ sucht und diese dann in den Ausdruck für $u_x$ substituirt, wo sich alsdann die überschüssigen Constanten gegenseitig aufheben, wie in Nr. 7. —

ist. Setzt man für $u_x$ wieder denselben Ausdruck, so erhält man zur Bestimmung von $A_x$ &c. die Gleichungen:

$$B_{x+1} = a \,.\, A_x - \alpha,$$

$$C_{x+1} = b \,.\, A_x - \beta,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$K_{x+1} = j \,.\, J_x - i,$$

$$A_{x+1} = k \,.\, K_x - \varkappa.$$

Hieraus folgt:

$$C_{x+2} = ab\, A_x - (ab + \beta),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$K_{x+n-1} = abc\ldots j \,.\, A_x - (bc\ldots j \,.\, \alpha + c\ldots j \,.\, \beta + \ldots i),$$

$$A_{x+n} = abc\ldots k \left\{ A_x - \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{ab} - \ldots \frac{\varkappa}{ab\ldots k} \right\}.$$

Die Integration der letzten Gleichung gibt:

$$A_x = (abc\ldots k)^{\frac{x}{n}} \,.\, \{ C \,.\, S_x + C' \,.\, S_{x-1} + \&c. \}$$

$$- \frac{\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{ab} + \ldots \frac{\varkappa}{ab\ldots k}}{1 - abc\ldots k} \,.\, (abc\ldots k)$$

Setzt man den constanten Theil $= Q$ und $(a \,.\, b \ldots k)^{\frac{1}{n}} = N$, und läßt alle arbiträren Constanten, außer der ersten, hinweg, wie in der vorhergehenden Nr.; so erhält man:

$$A_x = CN^x \,.\, S_x - Q,$$

$$B_x = C \,.\, N^{x-1}\, S_{x-1} - (aQ + \alpha),$$

$$C_x = C \,.\, ab\, N^{x-2}\, S_{x-2} - (ab \,.\, Q + b\alpha + \beta);\ \&c.$$

woraus sich durch Substitution ergibt:

$$u_x = C \,.\, \{ N^x \,.\, S_x + aN^{x-1}\, S_{x-1} + \ldots$$

$$\ldots + (abc\ldots j)\, N^{x-n+1}\, S_{x-n+1} \Big\},$$

$$-\frac{N}{1-N}\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{ab}+\ldots\frac{\varkappa}{ab\ldots k}\right)S_x$$

$$-\frac{N}{1-N}\left(\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{bc}+\ldots\frac{\alpha}{bc\ldots ka}\right)S_{x-1}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$-\frac{N}{1-N}\left(\frac{\varkappa}{k}+\frac{\alpha}{ka}+\ldots\frac{\nu}{kab\ldots j}\right)S_{x-n+1}.$$

(12.) Es ist zuweilen nothwendig: zwei oder mehrere periodische Functionen von verschiedenen Perioden auf einerlei Periode zurückzuführen, was leicht thunlich ist. — Die beiden Functionen seien z. B.:

$$a\,.\,S_x + b\,.\,S_{x-1}, \quad (\text{wo } n = 2),$$

und:

$$\alpha\,.\,S_x + \beta\,.\,S_{x-1} + \gamma\,.\,S_{x-2}, \quad (\text{wo } n = 3).$$

Um diese und ähnliche Functionen leichter bezeichnen zu können, sei:

$$S_x{}^{(n)} = \frac{\text{Summe der } x\text{ten Potenzen der } n\text{ten Wurzeln der Einheit}}{n};$$

so werden die beiden vorhergehenden Functionen resp. ausgedrückt durch:

$$a\,.\,S_x{}^{(2)} + b\,.\,S_{x-1}{}^{(2)},$$

$$\alpha\,.\,S_x{}^{(3)} + \beta\,.\,S_{x-1}{}^{(3)} + \gamma\,.\,S_{x-2}{}^{(3)},$$

wovon die erste offenbar gleich:

$$a\,.\,S_x{}^{(6)} + b\,.\,S_{x-1}{}^{(6)} + a\,.\,S_{x-2}{}^{(6)} + b\,.\,S_{x-3}{}^{(6)}$$
$$+ a\,.\,S_{x-4}{}^{(6)} + b\,.\,S_{x-5}{}^{(6)}$$

ist. — Denn wenn entweder $x$, oder $x - 2$, oder $x - 4$ ein Vielfaches von 6, also auch von 2 ist, mithin $x$ ein Vielfaches von 2, so reduciren sich beide Functionen auf $a$. — Ferner,

wenn $x-1$, oder $x-3$, oder $x-5$ ein Vielfaches von 6, also von 2, mithin $x-1$ nothwendig ein Vielfaches von 2 ist; so reduciren sich beide Functionen auf $b$. — Ebenso ergibt sich, daß die zweite der gegebenen periodischen Functionen gleich:

$$\alpha . S_x^{(6)} + \beta . S_{x-1}^{(6)} + \gamma . S_{x-2}^{(6)}$$

$$+ \alpha . S_{x-3}^{(6)} + \beta . S_{x-4}^{(6)} + \gamma . S_{x-5}^{(6)}$$

ist, so daß beide auf die gemeinschaftliche Periode $6 = 2 . 3$ zurückgeführt sind. —

Wenn die Perioden der einzelnen Functionen ein gemeinschaftliches Maß haben, so ist die gemeinschaftliche Periode offenbar gleich dem Producte der einzelnen Perioden, dividirt durch dieses Maß. —

(13.) Zu den in Nr. 3, 4 und 5 erwiesenen Eigenschaften periodischer Functionen, soll noch die folgende hier hinzugefügt werden:

Wenn:

$$P_x = a_x . S_x + b_x . S_{x-1} + \ldots k_x . S_{x-n+1}$$

ist, so ist:

$$f(P_x) = f(a_x) . S_x + f(b_x) . S_{x-1} + \ldots f(k_x) . S_{x-n+1},$$

d. h. jede beliebige Function einer periodischen Function ist wieder eine periodische, deren Coefficienten dieselben Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Function sind, wie diese Function. —

Ebenso, wenn $P'_x$, $P''_x, \ldots$ andere periodische Functionen sind; so ist:

$$f(P_x, P'_x, \ldots) = f(a_x, a'_x, \ldots) . S_x + f(b_x, b'_x, \ldots) S_{x-1} + \&c.$$

Bei constanten Coefficienten ist z. B.:

$$\frac{P_x + P'_x}{1 - P_x P'_x} = \frac{a + a'}{1 - a\,a'} S_x + \frac{b + b'}{1 - bb'} S_{x-1} + \&c.$$

wovon später einmal Anwendung gemacht werden wird, und kein formeller Beweis erforderlich ist. —

(14.) Man soll die Integrale $\Sigma S_x$ und $\Sigma P_x$ finden. —

Auflösung. Setzt man $\Sigma S_x = u_x$, so ist $u_{x+1} - u_x = S_x$, was wie eine periodische Gleichung behandelt werden kann. — Setzt man daher:

$$u_x = A_x . S_x + B_x . S_{x-1} + \ldots K_x . S_{x-n+1},$$

so hat man:

$$0 = (B_{x+1} - A_x - 1) S_x + (C_{x+1} - B_x) S_{x-1} + \ldots$$

$$\ldots . (A_{x+1} - K_x) S_{x-n+1},$$

und die Coefficienten der einzelnen Glieder $= 0$ gesetzt:

$$B_{x+1} = 1 + A_x,$$

$$C_{x+1} = B_x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{x+1} = K_x;$$

folglich:

$$A_{x+n} = 1 + A_x.$$

Für den gegenwärtigen Zweck ist eine particulare Auflösung dieser letzten Gleichung hinreichend, und es ist einleuchtend, daß $A_x = \frac{x}{n}$ derselben genügt. Dies gibt:

$$B_x = \frac{x-1}{n} + 1; \; C_x = \frac{x-2}{n} + 1, \ldots \&c.$$

und endlich:

$$u_x = \frac{1}{n} \{x . S_x + (x + n - 1) S_{x-1} + (x + n - 2) S_{x-2} \ldots$$

$$\ldots (x + 1) S_{x-n+1} \} + \text{const.}$$

$$= \text{const.} + \frac{x}{n} (S_x + S_{x-1} + \ldots S_{x-n+1})$$

$$+ \frac{(n-1) S_{x-1} + \ldots 1 . S_{x-n+1}}{n}$$

$$= \text{const.} + \frac{x}{n} + \frac{1}{n} \{ (n-1) S_{x-1}) + (n-2) S_{x-2} \ldots$$

$$\ldots + 1 \, . \, S_{x-n+1} \} \, .$$

Wenn also:

$$P_x = a \, . \, S_x + b \, . \, S_{x-1} + \ldots k \, . \, S_{x-n+1}$$

ist, so erhält man:

$$\Sigma P_x = \text{const.} + (a + b + \ldots k) \, . \, \frac{x}{n}$$

$$+ \frac{1}{n} \{ 0 \, . \, a + 1 \, . \, b + \ldots (n - 1 \, . \, k \} S_x$$

$$+ \frac{1}{n} \{ (n-1) \, . \, a + 0 \, . \, b + \ldots (n-2) \, . \, k \} S_{x-1}$$

$$+ \frac{1}{n} \{ (n-2) \, . \, a + (n-1) \, . \, b + 0 \, . \, c + \ldots \} S_{x-2}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$+ \frac{1}{n} \{ 1 \, . \, a + 2 \, . \, b + \ldots (n-1) \, . \, j + 0 \, . \, k \} S_{x-n+1} .$$

---

# Zwölfter Abschnitt.

---

## Einige Aufgaben über Kettenbrüche.

(1.) Man soll den Werth des Kettenbruches:

$$\cfrac{c_1}{a_1 + \cfrac{c_2}{a_2 + \cfrac{c_3}{a_3 + \dots \cfrac{c_x}{a_x}}}},$$

oder nach der kürzern Burmann'schen Bezeichnung:

$$\frac{c_1}{a_1 +} \frac{c_2}{a_2 +} \frac{c_3}{a_3 +} \dots\dots \frac{c_x}{a_x},$$

finden. —

Auflösung. Setzt man diesen Werth $= u_x$ so ist:

$$u_1 = \frac{c_1}{a_1},\ u_2 = \frac{c_1}{a_1 + \frac{c_2}{a_2}} = \frac{c_1 \cdot a_2}{a_1 \cdot a_2 + c_2},$$

und es ist einleuchtend, daß $u_x$ auf die Form $\frac{N_x}{D_x}$ gebracht werden kann. — Das Bildungsgesetz von $N_x$, $D_x$ stellt sich heraus, wenn man ebenso $u_3, u_4, \dots$ sucht, nämlich:

$$u_3 = \frac{c_1}{a_1 + \frac{c_2\, a_3}{a_2\, a_3 + c_3}} = \frac{c_1\, a_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot c_3}{(a_1\, a_2 + c_2)\, a_3 + a_1 \cdot c_3}$$

$$u_4 = \cfrac{c_1}{a_1 + \cfrac{c_2\, a_3 \,.\, a_4 + c_2 \,.\, c_4}{(a_2\, a_3 + c_3) a_4 + a_2 . c_4}}$$

$$= \frac{(c_1 a_2 \,.\, a_3 + c_1 \,.\, c_3) a_4 + c_1\, a_2 \,.\, c_4}{(a_1\, a_2\, a_3 + a_1\, c_3 + c_2\, a_3)\, a_4 + (a_1\, a_2 + c_2) c_4}, \text{ \&c.}$$

Man hat also:

$$N_1 = c_1$$

$$N_2 = c_1 \,.\, a_2$$

$$N_3 = c_1 \,.\, c_3 + c_1\, a_2 \,.\, a_3$$

$$N_4 = c_1\, a_2 \,.\, c_4 + (c_1 \,.\, c_3 + c_1\, a_2 \,.\, a_3)\, a_4 \,; \text{ \&c.}$$

d. h.:

$$N_1 = N_1$$

$$N_2 = a_2\, N_1$$

$$N_3 = c_3 \,.\, N_1 + a_3 \,.\, N_2$$

$$N_4 = c_4 \,.\, N_2 + a_4 \,.\, N_3$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$N_{x+2} = c_{x+2} \,.\, N_x + a_{x+2} \,.\, N_{x+1}\,; \qquad (1)$$

und ebenso:

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = c_2 + a_1\, a_2$$

$$D_3 = a_1 \,.\, c_3 + (c_2 + a_1\, a_2) \,.\, a_3$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$D_{x+2} = a_{x+2}\, D_{x+1} + c_{x+2}\, D_x \,. \qquad (2)$$

Die Integration der Gleichungen (1) und (2) gibt also die Werthe von $N_x$ und $D_x$ und mithin den von $u_x = \frac{N_x}{D_x}$. Da diese beiden Gleichungen einerlei Form haben, so ist das vollständige Integral der einen auch das der andern, und die Werthe von $N_x$, $D_x$ kön-

nen sich mithin nur durch die Werthe der darin vorkommenden willkürlichen Constanten unterscheiden. —

(2.) Man soll den Werth des Kettenbruches:

$$\frac{c}{a+}\,\frac{c}{a+}\,\frac{c}{a+}\ldots(n \text{ Glieder})$$

finden. —

Auflösung. Da hier $c_x$ und $a_x$ constant sind, so ist das Integral der Gleichung:

$$N_{x+2} = a\,.\,N_{x+1} + cN_x\,,$$

offenbar:

$$N_x = C\,.\,\alpha^x + C'\,.\,\beta^x\,,$$

wo $\alpha$, $\beta$ die Wurzeln der Gleichung $z^2 = az + c$ sind. — Dieses Integral wird auf eine dem gegenwärtigen Zwecke besser entsprechende Form gebracht, wenn die willkürlichen Constanten $C$, $C'$ resp. in $C + \frac{c'}{\alpha}$, $C + \frac{c'}{\beta}$ umgesetzt werden, wodurch die Allgemeinheit des Integrales nicht beeinträchtigt, aber die mehr symmetrische Form:

$$N_x = C\,(\alpha^x + \beta^x) + c'\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1})$$

desselben erhalten wird. — Bestimmt man ferner die Constanten so, daß $N_1 = c$, $N_2 = ac$ wird, so hat man:

$$N_x = \frac{c}{a^2 + 4c}\left\{a\,(\alpha^x + \beta^x) + 2c\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1})\right\}.$$

Wegen $D_1 = a$, $D_2 = a^2 + c$ erhält man ebenso:

$$D_x = \frac{1}{a^2 + 4c}\left\{(a^2 + 2c)\,(\alpha^x + \beta^x) + ac\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1})\right\},$$

so daß endlich der allgemeine Ausdruck von $u_x$ ist:

$$u_x = \frac{ac\,(\alpha^x + \beta^x) + 2c^2\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1})}{(a^2 + 2c)\,(\alpha^x + \beta^x) + ac\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1})}\,.$$

Wenn $U$ den Werth des ins Unendliche fortlaufenden Ketten-

bruches und $\alpha$ die dem absoluten Werthe nach größte Wurzel der Gleichung $z^2 - az - c = 0$ bezeichnet; so ergibt sich für $x = \infty$ sofort:

$$U = \frac{ac\alpha + 2c^2}{(a^2 + 2c)\,\alpha + ac},$$

welches, wie sich leicht zeigen läßt, eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$U^2 + aU - c = 0$$

ist. — Hiernach ist also:

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+\&c.}\text{ in inf.} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+\&c.}\text{ in inf.} = \sqrt{2}-1,$$

$$\frac{2}{1+}\,\frac{2}{1+}\ldots(x\text{ Glieder}) = \frac{2^{x+1} + 2(-1)^{x+1}}{2^{x+1} + (-1)^x}$$

und $= 1$ für $x = \infty$.

(3.) Man soll den Werth des $x$ gliedrigen Kettenbruches:

$$u_x = \frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\ \&c.$$

d. h. welcher $x$ einzelne Bruchglieder enthält, finden. —

Auflösung. Da die Periode der Nenner $a, b$ ist, so kann man setzen:

$$c_x = 1,\ a_x = b\ S_x + a\ S_{x-1},$$

wo $S_x$ die Summe der $x$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $z^2 - 1 = 0$ bezeichnet, und nach Nr. 1 ist alsdann:

$$N_{x+2} - N_x = (b\ S_x + a\ S_{x-1})\ N_{x+1}.$$

Diese Gleichung ist mit der in Abschn. 11, Nr. 6, integrirten identisch, und wenn man setzt:

$$N_x = v_x \, . \, \sqrt{(b \, . \, S_x + a \, . \, S_{x-1})}$$

$$= v_x \, . \, \sqrt{(b \, . \, S_x + \sqrt{a} \, . \, S_{x-1})}, \qquad \text{(Abschn. 11, Nr. 12.)}$$

so wird $v_x$ durch die Gleichung:

$$v_{x+2} - \sqrt{(ab)} \, . \, v_{x+1} - v_x = 0$$

gegeben. Bezeichnen nun $\alpha$, $\beta$ die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$z^2 - \sqrt{(ab)} \, . \, z - 1 = 0,$$

so hat man:

$$N_x = \{ \sqrt{a} \, . \, S_{x-1} + \sqrt{b} \, . \, S_x \} \left[ c\,(\alpha^x + \beta^x) + c'\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1}) \right].$$

Zur Bestimmung der Constanten hat man $N_1 = 1$, $N_2 = a$, und da $D_x$ ebenso gebildet ist, wie $N_x$, so werden die Constanten bestimmt, wenn man blos setzt: $D_1 = a$, $D_2 = ab + 1$.

Nach Substitution dieser Werthe und verrichteten Reductionen erhält man endlich folgenden Ausdruck für den Werth des Kettenbruches:

$$\frac{N_x}{D_x} = \sqrt{\frac{b}{a}} \, . \, \frac{\sqrt{(ab)}\,(\alpha^x + \beta^x) + 2\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1})}{(ab+2)\,(\alpha^x + \beta^x) + \sqrt{(ab)}\,(\alpha^{x-1} + \beta^{x-1})} \, .$$

Bezeichnet $\alpha$ wieder die absolut genommene größte Wurzel der Gleichung:

$$z^2 - \sqrt{(ab)} \, . \, z - 1 = 0,$$

und $U$ den Werth des ins Unendliche fortlaufenden Kettenbruches; so ergibt sich für $x = \infty$ sofort:

$$U = \sqrt{\frac{b}{a}} \, . \, \frac{2 + \alpha \, . \, \sqrt{(ab)}}{\sqrt{(ab)} + \alpha\,(ab+2)},$$

was, wie sich leicht zeigen läßt, eine Wurzel der Gleichung:

$$U^2 + bU = \frac{b}{a},$$

ist, wenn für $\sqrt{(ab)}$ sein Werth $\alpha - \frac{1}{\alpha}$ gesetzt wird. —

(4.) Man soll den Werth des als eine Function von $x$ betrachteten Kettenbruches:

$$1+\frac{c_x}{1+}\frac{c_{x-1}}{1+}\cdots\cdots\frac{c_1}{1},$$

finden. —

Auflösung. Wenn man das Frühere anwenden will, so muß man $x$ als constant ansehen, eine andere independente Veränderliche $z$ und eine andere Function $p_z$ von solcher Beschaffenheit annehmen, daß man hat:

$$c_x = p_{x-z+1}.$$

Dies gibt:

$$c_x = p_1,\ c_{x-1} = p_2, \ldots . c_{x-z+1} = p_z\,,$$

und wenn man alsdann nach den vorhergehenden Methoden den Werth des Kettenbruches:

$$1+\frac{p_1}{1+}\frac{p_2}{1+}\cdots\cdots\frac{p_z}{1}\,,$$

in seiner allgemeinen Form als Function von $z$ bestimmt, darin für $p_z$ und seine Ableitungen die Functionen $c_{x-z+1}$ und ihre Ableitungen nach $z$ und endlich $z=1$ setzt; so erhält man das verlangte Resultat. — Das folgende Verfahren ist jedoch einfacher und dem Irrthum weniger unterworfen: Der gesuchte Werth sei $=u_x$, so ist:

$$u_{x+1} = 1 + \frac{c_{x+1}}{u_x}$$

also:

$$u_{x+1}\,u_x = u_x + c_{x+1}\,,$$

oder:

$$u_x = \frac{v_{x+1}}{v_x}$$

gesetzt:

$$v_{x+2} = v_{x+1} + c_{x+1}\,v_x\,,$$

eine Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Form genau die-

selbe ist, als die der Gleichung, welche $N_{x-1}$ und $D_{x-1}$ in dem Werthe $\frac{N_{x-1}}{D_{x-1}}$ des Kettenbruches:

$$\frac{c_1}{1+}\,\frac{c_2}{1+}\cdots\cdots\frac{c_{x-1}}{1}$$

bestimmt. — Aber obgleich die Differenzengleichung dieselbe ist, so wird die Natur der daraus abgeleiteten Functionen doch wesentlich verändert durch die verschiedenen Constanten, welche ihr Integral enthalten muß, um es beiden Fällen anzupassen. — Gleichwohl zeigt sich hier eine bemerkenswerthe Relation zwischen beiden Functionen. Denn nimmt man:

$$(A_x + C\,.\,B_x) \times C'$$

als allgemeinen Werth von $v_x$, so hat man:

$$u_x - 1 = \frac{\triangle A_x + C\,.\,\triangle B_x}{A_x + C\,.\,B_x}$$

und:

$$\frac{N_{x-1}}{D_{x-1}} = C'.\,\frac{A_x + C''\,B_x}{A_x + C'''\,B_x}$$

wo die Constanten von den Werthen von $c_1$, $c_2$, $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ abhängen, und leicht zu finden sind. Diese Ausdrücke sind aber resp. die Werthe der Kettenbrüche:

$$\frac{c_x}{1+}\,\frac{c_{x-1}}{1+}\cdots\cdots\frac{c_1}{1}$$

und:

$$\frac{c_1}{1+}\,\frac{c_2}{1+}\cdots\cdots\frac{c_x}{1}.$$

(5.) Wenn der Werth des Kettenbruches:

$$1 + \frac{c_x}{1+}\,\frac{c_{x-1}}{1+}\cdots\cdots\frac{c_1}{1} = V_x$$

gegeben ist, den des Kettenbruches:

$$1 + \frac{c_x}{1+}\,\frac{c_{x-1}}{1+}\cdots\cdots\frac{c_1}{a}$$

zu finden. —

Auflösung. Verfährt man wieder wie oben, indem man $\frac{v_{x+1}}{v_x}$ für seinen Werth setzt; so erhält man wieder dieselbe Differenzengleichung, und mithin können sich die Ausdrücke der beiden Functionen blos durch die Werthe der in:

$$\frac{A_{x+1} + C\,.\,B_{x+1}}{A_x + C\,.\,B_x}$$

vorkommenden arbiträren Constante $C$ unterscheiden. — Da nun ein Werth $V_x$ von $\frac{v_{x+1}}{v_x}$ gegeben ist, so ist auch ein Werth von $v_x$ bekannt, weil derselbe gleich $V_1, V_2 \ldots V_{x-1}$ ist. — Da also ein particuläres Integral der Gleichung für $v_x$ bekannt ist, so kann auch leicht das allgemeine Integral derselben gefunden werden — und die Constanten müssen alsdann dem betrachteten Falle gemäß bestimmt werden. —

(6.) Es soll z. B. der Werth $u_x$ des Kettenbruches:

$$1 + \frac{c}{1+}\,\frac{c}{1+}\cdots\cdots\frac{c}{a}$$

gefunden werden, welcher $x$ Bruchglieder hat; so ist:

$$u_x = \frac{\alpha^{x+1} + C\,.\,\beta^{x+1}}{\alpha^x + C\,.\,\beta^x}\,; \quad C = -\frac{\alpha\left(1 + \frac{c}{a}\right) - \alpha^2}{\beta\left(1 + \frac{c}{a}\right) - \beta^2},$$

wo $\alpha, \beta$ die Wurzeln der Gleichung:

$$v^2 - v - c = 0$$

sind. —

# Dreizehnter Abschnitt.

---

## Vermischte Aufgaben.

(1.) Man soll bestimmen, bis zu welchem Betrage ein Kapital $A$ anwächst, wenn dasselbe $x$ Jahre zu dem Zinsfuße $r$ ausgeliehen wird, und zwar: 1, bei einfachen Zinsen — und 2, bei Zinseszinsen (zusammengesetzten Zinsen)? —

Aufl. 1. Bei einfachen Zinsen beträgt der jährliche Zuwachs oder die jährlichen Zinsen des Kapitales $A$ offenbar $rA$. Bezeichnet also $P_x$ den Werth des Kapitales nach $x$ Jahren, so ist $P_x + rA$ sein Werth am Ende des $(x+1)$ ten Jahres, welcher aber auch durch $P_{x+1}$ ausgedrückt wird. — Man hat daher:

$$P_{x+1} = P_x + rA, \text{ oder } \triangle P_x = rA,$$

und integrirt:

$$P_x = rA \,.\, x + C.$$

Nun ist aber das ursprüngliche Kapital oder der Werth von $P_x$ für $x=0$, d. h. $P_0 = A$; also:

$$P_0 + rA \,.\, 0 + C = A, \text{ oder } C = A,$$

und endlich:

$$P_x = A\,(1 + rx).$$

Aufl. 2. Bei Zinseszinsen betragen die Zinsen im $(x+1)$ten Jahre offenbar $rP_x$, wenn $P_x$ wieder den Werth des Kapitals nach $x$ Jahren bezeichnet. Man hat also:

$$P_{x+1} = P_x + rP_x = (1 + r) \,.\, P_x,$$

und integrirt:

$$P_x = C(1+r)^x.$$

Nun ist aber $P_0 = A$, mithin $C = A$ und $P_x = A(1+r)^x$.

(2.) Es legt Jemand ein gewisses Kapital bei dem Zinsfuße $r$ in eine Sparkasse und lebt davon so, daß er das erste Jahr nur die Zinsen, das zweite Jahr die doppelten Zinsen, das dritte Jahr die dreifachen Zinsen des Restes, u. s. f. ausgibt; wie lange kann er davon leben, und in welchem Jahre ist seine Ausgabe am größten? —

Auflösung. Wenn $P_x$ wieder den Werth des Kapitals am Ende des $x$ten Jahres bezeichnet, so sind die Zinsen im $(x+1)$ten Jahre $= rP_x$, und mithin ist die Ausgabe für dieses Jahr $= (x+1)rP_x$. Also ist das Kapital am Ende des $(x+1)$ten Jahres:

$$P_x + rP_x - (x+1)\,r\,P_x = P_x(1-xr);$$

folglich hat man:

$$P_{x+1} = (1-xr)\,P_x,$$

und in der Voraussetzung von $P_0 = A$ integrirt:

$$P_x = A\,.\,1\,(1-r)\,(1-2r)\,\ldots\ldots\,\{1-(x-1)\,.\,r\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $x = 1 + \frac{1}{r}$, und so lange kann also der Eigenthümer von seinem Kapitale leben. — Die Ausgabe im $x$ten Jahre wird allgemein ausgedrückt durch $xr\,.\,P_{x-1}$, und ist folglich am größten, wenn $\Delta\,(xrP_{x-1}) = 0$ ist. — Nun ist aber:

$$\Delta\,(xrP_{x-1}) = 1\,.\,(1-r)\,\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\{1-(x-1)\,.\,r\}\,\{(x+1)(1-xr)-x\},$$

und wenn man setzt:

$$(x+1)(1-xr)-x = 0,$$

so ergibt sich:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2},$$

und die nächst kleinere ganze Zahl hiervon ist die gesuchte Zahl. Für $r = \frac{1}{20}$ ist nahezu $x = 4$ Jahre. Hier ist $\triangle(xrP_{x-1}) = 0$ für $x = 4$, so daß die im 4ten und 5ten Jahre verausgabten Summen gleich und größer als in jedem andern Jahre sind. —

(3.) Es legt Jemand ein Kapital $A$ zu dem Zinsfuße $r$ an, verausgabt jedes Jahr einen Theil $= a$ der Zinsen und schlägt den Rest derselben zu dem Kapitale; welchen Werth hat sein Kapital nach $x$ Jahren? —

Auflösung. Wenn $P_x$ diesen Werth bezeichnet, so hat man offenbar:

$$P_{x+1} = P_x + rP_x - a,$$

$$P_{x+1} - (1+r)P_x + a = 0,$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$P_x = C(1+r)^x + \frac{a}{r}.$$

Die Constante $C$ muß nach der Bedingung $P_0 = A$ bestimmt werden; folglich ist:

$$C = A - \frac{a}{r},$$

und endlich:

$$P_x = \left(A - \frac{a}{r}\right)(1+r)^x + \frac{a}{r}. \qquad (\varrho)$$

Wenn $a$ die jährlichen Zinsen $rA$ übersteigt, und man setzt $P_x = 0$, so ergibt sich:

$$x = \frac{\log a - \log(a - rA)}{\log(1+r)}$$

als die Zeit, innerhalb welcher das Kapital aufgezehrt ist. — Setzt man $P_x = 0$ in ($\varrho$) und sucht dann $a$, so findet man:

$$a = rA \cdot \frac{(1+r)^x}{(1+r)^x - 1}$$

für die Summe, welche jährlich ausgegeben werden darf, wenn das Kapital $x$ Jahre ausreichen soll. —

(4.) Es hat Jemand ein Kapital $A$ zu dem Zinsfuße $r$ angelegt, indem er das erste Jahr die ganzen Zinsen, das zweite Jahr die doppelten Zinsen ꝛc. ausgibt; wie lange hält das Kapital an? —

Auflösung. Wenn $P_x$ wieder den Werth des Eigenthums am Ende des $x$ten Jahres ausdrückt, so hat man:

$$P_{x+1} = P_x(1+r) - (x+1) . rA,$$

und integrirt:

$$P_x = A\left\{(x+1) - \frac{(1+r)^x - 1}{r}\right\},$$

so daß $x$ aus der Exponentialgleichung:

$$(1+r)^x = 1 + r + rx,$$

abgeleitet werden muß. — Für $r = \frac{1}{20}$ ergibt sich nahezu $x = 6,6$.

Will man einen mehr genäherten Werth haben, so muß man sich erinnern, daß, wenn für die Gleichung $f(x) = 0$ ein erster Näherungswerth $a$ von $x$ gefunden und $a + h = x$ der wahre Werth ist, man hat:

$$f(a+h) = 0;$$

folglich nahezu:

$$f(a) + f'(a)h = 0,$$

also:

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

In dem gegenwärtigen Falle ist also:

$$f(a) = (1+r)^a - 1 - r - ra,$$

mithin:

$$f'(a) = \frac{df(a)}{da} = (1+r)^a . \log(1+r) - r,$$

und:

$$h = \frac{(1+r+ra)-(1+r)^a}{(1+r)^a \log(1+r) - r},$$

$$= -0.00453,$$

mithin der zweite Näherungswerth $x = 6{,}59547$.

(5.) Jemand treibt ein gewisses Geschäft, und verausgabt jedes Jahr das Doppelte des vorjährigen Ertrages dieses Geschäftes, welches von Jahr zu Jahr einträglicher wird, so daß das Vermögen dieses Mannes regelmäßig wie das Quadrat der seit dem Beginn des Geschäftes verflossenen Zeit wächst; nach welchem Gesetz nimmt der Ertrag des Geschäftes zu? —

Auflösung. Wenn $P_x$ diesen Ertrag im $x$ten Jahre bezeichnet, so findet man:

$$P_{x+1} - 2P_x = a(2x+1),$$

folglich:

$$P_x = a\{5 . 2^{x-1} - (2x+3)\} + P_1 . 2^{x-1}.$$

und wegen $P_1 = a . 1^2 = a$ endlich:

$$P_x = a(3 . 2^x - 2x - 3).$$

(6.) Es besitzt Jemand ein gewisses Kapital $A$, wovon er die Hälfte zu dem Zinsfuße $r$ ausleihet, und den Rest in ein Geschäft verwendet zu dem Zinsfuß $2r$, indem die Zinsen jedoch nur alle zwei Jahre fällig werden; seine Ausgaben sind jährlich $= a$, und er legt endlich allen Gewinn und Ueberschuß ebenfalls zu dem Zinsfuße $r$ als Kapital an. — Wie groß ist sein Vermögen nach $x$ Jahren? —

Auflösung. Es bezeichne $P_x$ dieses Vermögen. — Wenn $x$ eine gerade Zahl ist, so bringt der in das Geschäft verwandte Theil $\frac{1}{2}A$ des ursprünglichen Kapitales im $(x+1)$ten Jahre keine Zinsen, so daß man also für ein gerades $x$ hat:

$$P_{x+1} = (1+r)P_x - a.$$

Aber wenn $x$ eine ungerade Zahl ist, so betragen die zweijähri-

gen Zinsen dieses Theiles zu dem Zinsfuße $2r$ offenbar $4r \cdot \frac{A}{2} = 2rA$, so daß man für ein ungerades $x$ hat:

$$P_{x+1} = (1 + r)\, P_x - a + 2rA.$$

Es ist beim ersten Anblick vielleicht nicht sofort klar, wie diese beiden Differenzengleichungen zu behandeln sind, weil jede derselben unrichtig wird, wenn $x$ um eine Einheit zunimmt, und mithin die Function $P_x$ nicht durch Integration aus der einen, oder andern erhalten werden kann. — Um diese Schwierigkeit zu umgehen, und eine Gleichung zu erhalten, welche sowohl für gerade, wie für ungerade Werthe von $x$ gilt, muß man zu der früher erörterten Theorie der periodischen Functionen seine Zuflucht nehmen. In der That, da die periodische Function des zweiten Grades:

$$a \cdot S_x + (a - 2rA) \cdot S_{x-1}$$

gleich $a$, oder gleich $a - 2rA$ ist, jenachdem $x$ gerade, oder ungerade ist; so schließt die Gleichung:

$$P_{x+1} - R \cdot P_x + \{a \cdot S_x + (a - 2rA)\, S_{x-1}\} = 0,$$

wo $R = 1 + r$, die beiden vorhergehenden Gleichungen in sich, und gilt für jeden Werth von $x$. — Integrirt man dieselbe nach Abschn. 11, Nr. 9, so erhält man:

$$P_x = C \cdot R^x - \frac{aR + a - 2rA}{1 - R^2}\, S_x$$

$$- \frac{(a - 2rA)\, R + a}{1 - R^2}\, S_{x-1},$$

und wenn man die Constante $C$ so bestimmt, daß $P_0 = \frac{1}{2} A$ wird, und setzt für $S_x$, $S_{x-1}$ ihre Werthe:

$$\frac{1 + (-1)^x}{2}, \quad \frac{1 - (-1)^x}{2};$$

so erhält man endlich:

$$P_x = A\left\{\frac{(r+6)(1+r)^x + 2r(-1)^x}{2(r+2)} - 1\right\} - \frac{a}{r}\{(1+r)^x - 1\}.$$

(7.) Wenn alles wie in der letzten Aufgabe bleibt, nur daß der in das Geschäft verwandte Theil $= \frac{1}{2}A$ des anfänglichen Kapitales $r'$ Procent, aber immer erst nach $n$ Jahren trägt; den Vermögensstand nach $x$ Jahren zu finden. —

Auflösung. In diesem Falle findet die Gleichung:

$$P_{x+1} = R \,.\, P_x - a$$

für jeden Werth von $x$ statt, außer wenn $x+1$, also auch $x-n+1$ ein Vielfaches von $n$ ist, und sie in:

$$P_{x+1} = R \,.\, P_x - (a - b),$$

übergeht, wo $b = nr' \,.\, \frac{A}{2}$ ist. — In diesem Falle wird also die periodische Gleichung:

$$0 = P_{x+1} - R \,.\, P_x + \{a \,.\, S_x + a \,.\, S_{x-1} + \ldots.$$

$$\ldots.(a - b)\, S_{x-n+1}\},$$

welche, wie in Abschn. 11, Nr. 9 integrirt, gibt:

$$P_x = C \,.\, R^x + \frac{a}{R-1} - \frac{b}{R^n - 1}$$

$$\{S_x + R \,.\, S_{x-1} + \ldots. R^{n-1} \,.\, S_{x-n+1}\},$$

und wenn die Constante $C$ wieder für $x = 0$ bestimmt wird; so findet sich:

$$C = \frac{A}{2} + \frac{b}{R^n - 1} - \frac{a}{R-1},$$

$$= \frac{A}{2}\left(1 + \frac{nr'}{R^n - 1}\right) - \frac{a}{R-1}.$$

(8.) Wenn sich die Person in mehrere Geschäfte der in den beiden letzten Aufgaben erwähnten Art einläßt, ihren Vermögenszustand nach $x$ Jahren zu finden. —

Auflösung. Es bedeute $n$ die kürzeste Zeit, nach welcher das ausgeliehene Kapital Zinsen bringt, und $n', n'', \dots$ resp. die Zeitintervalle, nach welchen die in die verschiedenen Geschäfte verwandten Kapitaltheile $A', A'', \dots$ ihre Zinsen bei dem Zinsfuße $r', r'', \dots$ eintragen, indem das kleinste gemeinschaftliche Maß von $n, n', n'', \dots$ als Zeiteinheit genommen wird, während welcher die Ausgaben $= a$ sind; so hat man:

$$P_{x+1} = P_x - a,$$

ausgenommen, wenn $x + 1$ ein Vielfaches von $n$, oder $n', \dots$ ist, in welchen Fällen noch die Glieder:

$$nr \,.\, P_x \,,\; n'\, r'\, A', \, \&c.$$

im zweiten Theile der Gleichung addirt werden müssen. — Wenn alsdann die Bezeichnung in Abschn. 11, Nr. 11, angewandt wird, so ist die alle diese Fälle umfassende periodische Gleichung:

$$P_{x+1} = P_x \left(1 + nr \,.\, S_{x-n+1}{}^{(n)}\right)$$
$$- a + n'\, r'\, A' \,.\, S_{x-n'+1}{}^{(n')} + \&c.,$$

welche, wenn $m = n \,.\, n', n'' \dots$ dividirt durch alle größten gemeinschaftlichen Maße zwischen zwei, oder mehreren der Zahlen $n, n', n'', \dots$ ist, in folgende übergeht:

$$0 = P_{x+1}$$
$$- P_x \left\{1 + nr \left(S_{x-n+1}{}^{(m)} + S_{x-2n+1}{}^{(m)} \dots + S_{x-m+1}{}^{(m)}\right)\right\} + a$$
$$- n'\, r'\, A' \left\{S_{x-n'+1}{}^{(m)} + S_{x-2n'+1}{}^{(m)} \dots + S_{x-m+1}{}^{(m)}\right\}$$
$$- n''\, r''\, A'' \; \&c.$$

Nun ist aber:

$$1 = S_x{}^{(m)} + S_{x-1}{}^{(m)} - \dots S_{x-m+1}{}^{(m)},$$

und:

$$a = a \,.\, S_x{}^{(m)} + .\, S_{x-1}{}^{(m)} + \&c.,$$

und wenn man setzt:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \ldots a_n = 1 + nr, a_{n+1} = 1, a_{n+2} = 1, \ldots$$

$$\ldots a_{2n} = 1 - nr, \ldots \text{\&c.}$$

$$b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots b_{n'} = n' r' A', b_{n'+1} = 0, \ldots$$

$$\ldots b_{2n'} = n' r' A', \text{\&c.}$$

$$c_1 = 0, \ldots \ldots c_{n''} = n'' r'' A'', c_{n''+1} = 0, \text{\&c. \&c.}$$

$$-a + b_1 + c_1 + \ldots = \alpha, - a + b_2 + c_2 + \ldots = \beta, \text{\&c. \&c.};$$

so wird die Gleichung:

$$P_{x+1} - P_x \{ a_1 S_x^{(m)} + \ldots a_m S_{x-m+1}^{(m)} \}$$

$$- \{ a . S_x^{(m)} \beta . S_{x-1}^{(m)} \ldots \varkappa . S_{x-m+1}^{(m)} \} = 0,$$

deren Integral in Abschn. 11, Nr. 10, vollständig angegeben ist. — In diesem Falle ist:

$$N = (1 + n r)^{\frac{1}{n}},$$

und wenn $P_0 = A$ gesetzt wird, so erhält man für die arbiträre Constante:

$$C = A - \frac{N}{1 - N} \left( \frac{\alpha}{a_1} + \frac{\beta}{a_1 \, a_x} + \ldots \frac{\varkappa}{a_1 \ldots a_n} \right);$$

aber weitere Reductionen dieses Integrales sind nicht thunlich, so lange nicht die speciellen Zahlenwerthe von $n$, $n'$, $n''$, ... gegeben sind. —

(9.) Zwei Personen $A$ und $B$ spielen unter folgenden Bedingungen miteinander: Wenn $A$ ein Spiel gewinnt, so wird der Einsatz für das folgende Spiel verdoppelt; aber wenn $B$ gewinnt, verdreifacht. — Nach $x$ Spielen findet sich, daß beide Spieler abwechselnd gewonnen und verloren haben, indem $A$ das erste Spiel gewonnen hat; welches sind ihre resp. Gewinne und Verluste? —

Auflösung. Es bezeichne $u_x$ den Totalgewinn des $A$ nach dem $x$ten Spiele und $P_x$ den Einsatz bei diesem Spiele. Alsdann

ist, wenn $A$ das $x$te Spiel gewinnt: $P_{x+1} = 2P_x$; aber wenn $B$ gewinnt: $P_{x+1} = 3P_x$. — Nun gewinnt aber $A$ dasselbe, wenn $x$ ungerade ist, und $B$ wenn $x$ gerade ist. — Es ist also in allen Fällen, wenn der Zahlenwerth von $x$ unbestimmt bleibt:

$$P_{x+1} = (3 \,.\, S_x + 2 \,.\, S_{x-1})\, P_x; \qquad (a.)$$

wo $S_x$ die halbe Summe der $x$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $z^2 - 1 = 0$ bedeutet. —

Ferner ist $\Delta u_x$ der Gewinn, oder Verlust des $A$ bei dem $(x+1)$ten Spiele, und offenbar $= P_{x+1}$; nämlich ein Gewinn, wenn $x+1$ eine ungerade Zahl ist, und ein Verlust, wenn $x+1$ eine gerade Zahl ist; folglich:

$$u_{x+1} - u_x = (S_x - S_{x-1})\, P_{x+1}; \qquad (b)$$

Es bleibt also blos noch übrig, die Gleichungen $(a)$ und $(b)$ zu integriren. — Die Gleichung $(a)$ ist aber die in Abschn. 12, Nr. 8, woraus folgt, wenn die Constante so bestimmt wird, daß der erste Einsatz $P_1$ eine gegebene Größe wird:

$$P_x = P_1 \,.\, \sqrt{2} \,.\, \{\sqrt{2} \,.\, S_x + \sqrt{3} \,.\, S_{x-1}\}\, (\sqrt{6})^{x-2},$$

und hiernach den Werth von $P_{x+1}$ in $(b)$ gesetzt, erhält man:

$$u_{x+1} - u_x = P_1 \,.\, \sqrt{2}\, \{\sqrt{3} \,.\, S_x - \sqrt{2} \,.\, S_{x-1}\} \,.\, (\sqrt{6})^{x-1}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man:

$$u_x = A_x \,.\, S_x + B_x \,.\, S_{x-1},$$

woraus durch Substitution und Gleichsetzung gleicher Glieder folgt:

$$B_{x+1} - A_x = P_1 \,.\, (\sqrt{6})^x$$

$$A_{x+1} - B_x = -2P_1 \,.\, (\sqrt{6})^{x-1},$$

$$A_{x+2} - B_{x+1} = -2P_1 \,.\, (\sqrt{6})^x.$$

Durch Addition der ersten und letzten dieser drei Gleichheiten ergibt sich:

$$A_{x+2} - A_x = -P_1 \,.\, (\sqrt{6})^x,$$

und hieraus durch Integration:

$$A_x = CS_x + C' S_{x-1} + \frac{P_1}{5} . (\sqrt{6})^x ;$$

folglich:

$$B_x = C' S_x + CS_{x-1} + \frac{4}{5} . P_1 (\sqrt{6})^{x-1},$$

und:

$$u_x = C - \frac{1}{5} P_1 . \{ S_x . (\sqrt{6})^x - 4 S_{x-1} . (\sqrt{6})^{x-1} \}.$$

Es ist aber $u_0 = 0$, also $C = \frac{1}{5} P$, und endlich:

$$u_x = \frac{1}{5} P_1 \{ 1 - (\sqrt{6})^x . S_x + 4 . (\sqrt{6})^{x-1} . S_{x-1} \}.$$

(10.) Die letzte Aufgabe läßt sich verallgemeinern, wenn angenommen wird: daß, wenn $A$ gewinnt, der Einsatz bei dem folgenden Spiele irgend eine Function des frühern Einsatzes und der Anzahl der bereits gemachten Spiele ist, und wenn $B$ gewinnt, eine andere Function dieser Größen. — Wenn alsdann $A$ und $B$ wieder abwechselnd gewinnen und verlieren, den Gesammtbetrag des Gewinnes, oder Verlustes von $A$ zu finden. —

Auflösung. Hier ist:

$$P_{x+1} = f(P_x , x),$$

wenn $x$ ungerade ist, und $P_{x+1} = f_1 (P_x , x)$, wenn $x$ gerade ist, mithin allgemein:

$$P_{x+1} = S_x . f_1 (P_x , x) + S_{x-1} . f (P_x , x).$$

Um diese Gleichung zu integriren, oder wenigstens von periodischen Functionen zu befreien, setze man:

$$P_x = A_x . S_x + B_x . S_{x-1}.$$

Da alsdann $f(P_x , x)$ eine Function von $S_x$, $S_{x-1}$ wird, so läßt sie sich auf die allgemeine Form aller periodischen Functionen (Abschn. 12, Nr. 12) bringen, so daß man hat:

$$f(P_x, x) = f(A_x, x) . S_x + f(B_x, x) S_{x-1},$$

und ebenso:

$$f_1(P_x, x) = f_1(A_x, x) . S_x + f_1(B_x, x) . S_{x-1};$$

folglich:

$$S_x \{B_{x+1} - f_1(A_x, x)\} + S_{x-1} \{A_{x+1} - f(B_x, x)\} = 0,$$

also:

$$B_{x+1} = f_1(A_x, x), \qquad A_{x+1} = f(B_x, x),$$

d. h.:

$$A_{x+2} = f\{f_1(A_x, x), x\},$$

eine Differenzengleichung zweiter Ordnung, deren Integration $A_x$ gibt. — Setzt man $x = 2z$ und $A_{2z} = A'_z$, so wird diese Gleichung auf eine von der ersten Ordnung gebracht, deren Integration von den besondern Formen von $f$ und $f_1$ abhängt. — Setzt man z. B.:

$$f(P_x, x) = a_x . P_x + b_x$$

$$f_1(P_x, x) = \alpha_x . P_x + \beta_x,$$

so wird die zur Bestimmung von $A'_z$ dienende Gleichung linear und von der ersten Ordnung, nämlich:

$$A'_{z+1} = a_x \alpha_x . A'_z + (b_x + a_x \beta_x)$$

$$= a_{2z} \alpha_{2z} . A'_z + (b_{2z} + a_{2z} \beta_{2z}.$$

(11.) Wenn die Größen $A, B, C, \ldots$ nach folgendem Gesetze:

$$A = a, B = \frac{1-A}{2}, C = \frac{1-2B}{3}, D = \frac{1-3C}{4}, \text{ \&c.}$$

von einander abhängen, das allgemeine Glied der von denselben gebildeten Reihe zu finden. —

Auflösung. Es sei $u_x$ das $x$te, also $u_{x+1}$ das $(x+1)$te Glied, so hat man die Differenzengleichung:

$$u_{x+1} = \frac{1 - xu_x}{x+1},$$

oder:

$$(x+1) . u_{x+1} + xu_x = 1$$

deren Integration gibt:

$$xu_x = \tfrac{1}{2} + C.(-1)^x,$$

und wenn man $C$ so bestimmt, daß $u_1 = a$ wird; so hat man endlich:

$$u_x = \frac{1}{2x} + \frac{(2a-1).(-1)^{x+1}}{2x}.$$

(12.) Wenn man hat:

$$A = a,\ B = 2A^2 - 1,\ C = 2B^2 - 1, \text{\&c.}$$

das allgemeine Glied dieser Reihe zu finden. —

Auflösung. Hier ist:

$$u_{x+1} = 2u_x{}^2 - 1,$$

woraus durch Integration folgt:

$$u_x = \tfrac{1}{2}\{(a+\sqrt{a^2-1})^{2x-1} + (a-\sqrt{a^2-1})^{2x-1}\},$$

wenn die Constante gehörig bestimmt wird. —

Ebenso verfährt man, wenn man hat:

$$A = a,\ B = f(A),\ C = f(B),\ D = f(C) \text{\&c.}$$

(13.) Man soll das Integral:

$$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

finden. —

Auflösung Betrachtet man dasselbe als eine zu bestimmende Function $F_n$ von $n$, so gibt die theilweise Integration:

$$F_n = \int x^{2n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$= -x^{2n-1}\sqrt{(1-x^2)} + (2n-1)\int x^{2n-2}\,dx.\sqrt{(1-x^2)},$$

oder wenn man:

$$P_n = x^{2n-1}\sqrt{(1-x^2)},$$

und $\dfrac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)}}$ für $\sqrt{(1-x^2)}$ setzt:

$$F_n = -P_n + (2n-1)(F_{n-1} - F_n),$$

d. h.:

$$F_n - \frac{2n-1}{2n} . F_{n-1} = -\frac{P_n}{2n}. \qquad (a.)$$

Das Integral dieser Differenzengleichung, worin $n$ die independente Veränderliche bedeutet, ist:

$$F_n = \frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots(2n)} \times$$

$$\left\{ C - \Sigma \frac{2.4\ldots\ldots(2n)}{1.3.5\ldots.(2n+1)} P_{n+1} \right\}.$$

Da aber die durch das Zeichen $\Sigma$ angedeutete Integration nicht ausführbar ist, so muß man, wie in Abschn. 4, Nr. 3, die entsprechende Reihe:

$$\frac{1}{1} P_1 + \frac{2}{1.3} P_2 + \ldots \frac{2.4\ldots(2n-2)}{1.3\ldots(2n-1)} P_n,$$

setzen, und wenn alsdann die Constante $C$ nach der Bedingung:

$$F_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \sin^{-1} x$$

bestimmt wird, so wie für $P_1$, $P_2$,... ihre Werthe restituirt werden; so erhält man endlich:

$$F_n = \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots.(2n)} \left\{ \sin^{-1} x - \left( \frac{x}{1} + \frac{2x^3}{1.3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \ldots\ldots \frac{2.4\ldots.(2n-2)}{1.3\ldots.(2n-1)} x^{2n-1} \right) . \sqrt{(1-x^2)} \right\}.$$

Wenn blos der Werth des Integrales zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ gesucht wird, so ist, weil $x^{2n-1} . \sqrt{(1-x^2)}$ an diesen beiden Grenzen verschwindet, offenbar $P_n = 0$, und die Gleichung ($a$) reducirt sich auf:

$$F_n - \frac{2n-1}{2n} F_{n-1} = 0,$$

woraus folgt:

$$F_n = C \times \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots.(2n)},$$

und wegen:

$$C = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

endlich:

$$F_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Dasselbe Verfahren der Reduction auf eine Differenzengleichung ist offenbar in allen ähnlichen Fällen statt des gewöhnlichen Verfahrens der successiven Reductionen anwendbar. —

---

Druckfehler.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 5 | Zeile | 7 | von | oben | lies | $\cos x\theta$ statt $\cos x\theta x$. |
| „ | 7 | „ | 5 | „ | „ | „ | $2^{x+1}$ statt $1^{x+1}$. |
| „ | 12 | „ | 8 | „ | „ | „ | angeben statt angegeben. |
| „ | 12 | „ | 11 | „ | „ | „ | $t +$ statt $1 +$. |
| „ | 14 | „ | 19 | „ | „ | „ | $u_{x+n}$ statt $u_{x-n}$. |
| „ | 47 | „ | 17 | „ | „ | „ | $hx$ statt $h_x$. |
| „ | 52 | „ | 19 | „ | „ | „ | $u_x$ statt $u^x$. |
| „ | 71 | „ | 9 | „ | „ | „ | $t$ statt $x$. |
| „ | 73 | „ | 15 | „ | „ | „ | $= a_0$ statt $+ a_0$. |
| „ | 85 | „ | 25 | „ | „ | „ | $\times$ &c. statt $+$ &c. |
| „ | 129 | „ | 4 | „ | „ | „ | gewöhnlichen statt gewärnlichen. |
| „ | 134 | „ | 1 | „ | „ | „ | Kegelschnittes statt Kegeabschnittes. |

„ 58 sind unten die Worte: „fortschreiten, ist“ noch hinzuzufügen.

---